
BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
14
3 M
23

GEOMETRIA

SPECIOSA.





AD MAIOREM DEI GLORIAM



GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA

PRIMVM

De potestatibus, à radice binomia, & residua.

SECVNDVM

De innumerabilibus numerosis progressionibus.

TERTIVM

Bib: Sec: Coll· *De quasi proportionibus.* *Rom: Soc: J.*

QVARTVM

De rationibus logarithmicis.

QVINTVM

De proprijs rationum logarithmis.

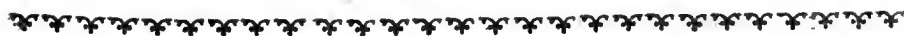
SEXTVM

De innumerabilibus quadraturis.



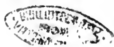
PETRI MENGOLI

I. V. Ph. D. Coll. Patr. Bonon. Archigymn. Mechanici.



BONONIÆ, Typis Io. Baptistæ Ferronij 1659.

Superiorum permissu.



Vidit Ouidius Montalbanus Philosophus Moralis, Mathematicus, & Iurista: & vndequaq; speciosa, & dignissima luce publica inuenit hæc Elementa, &c. Pro Reuerendiss. P. Inquisit. Bonon.

Vidit D. Inuentius Tortus Cler. Reg. S. Pauli, Pœnit. pro Illustriss. & Reuerendiss. D. D. Hieronymo Boncompagno Archiep. Bonon. & Princ.

Imprimatur.

Fr. Gulielmus Fochus Inquisitor Bonon.



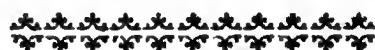
REGESTVM.

abcdefghik ABCDEFGHIKLMNOPQRST VXYZ. Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz. Aaa Bbb Ccc.

Omnes sunt duerniones, præter k, quæ est ternio, & c, quæ est semifol.

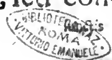
Amplissimo, & Integerrimo Viro D. FERDINANDO RIARIO,

Marchioni Castilionis Orciæ, Patritio Veneto, Senatori Bononiensi, Antiquiori, & Benemerito Patri Patriæ: PETRVS MENGOLVS Fęlicitatem.





Eque Speciosæ Geometrię pulchritudini, neque tui Nominis claritati, quidquam appositum existimo, Vir Amplissime; quòd istud, in illius fronte, præfulgeat. Ipsæ satis amabiles litterarum cultoribus visæ sunt, vtraque Geometria, Archimedis antiqua, & Indiuisibilium noua Bonauenturæ Cauallerij Præceptoris mei, necnon & Viettæ Algebra: quarum, non ex confusione, aut mixtione, sed con-



iunctis perfectionibus, noua quædam,& propria laboris nostri species, nemini poterit displicere. Tuæ verò splẽdor gloriæ, Mathematicas quantascunque longè prætergreditur lucubrationes: & quacunque versùm prudentia regit fortunam, præclarissimos diffundit radios; tuaque domestica sinceræ insinuat virtutis exempla. Inter quæ, singulare illud, ad bonas artes promouendas, tuæ officium est prouidentiæ; sua cuique studia consilio partiri, munificentia instruere, augere fauoribus, & auctoritate ad Magisterij decus, & perfectionem perducere. Id quod ego expertus hucusque sum ab adolescẽtia, tuæ

alumnus

alumnus protectionis. Nam te suasore primùm, deinde (post Cauallerium defunctum) etiam præceptore, scholasticus Mathematicus; te Vexillifero, professor publicus Arithmetices, ante lauream; & post lauream, te nostri Archigymnasij moderatore, ad nouam vsque cathedrã Mechanicarum euectus: litterariam dignitatem, & fortunas omnes, tuis debeo beneficijs. Hanc itaque meam Geometriam, grati erga te animi perpetuum statuo monimentum: tuorumque in me munerum aliqualem censum, in illius oblatione repẽdo. Fęliciori longè successu, quàm cum alijs plerũque scriptoribus contingit,

tingit, ſurdis vota numinibus nuncupare: tabellaſque appendere; quarum dij ſui ne quidem titulos intelligant. Tibi vni, me ipſum totum, voluntate pariter, & intellectu deditum, creditumque deuincio: qui ſi forte ſtudijs Geometriæ quidquam adiecero, propoſito conueniens titulo, nouum videlicet, atque ſpecioſum; tuam poſtulo, & expecto, noſtrorum elementorum, benigna in ſuſceptione, ſententiam. Vale. Bononiæ IX. Kal. Ianuarias MDCLX.

Lectori Elementario.



Ibi hunc librum scripsi, Lector, & Scholaris beneuole: ideoque nihil alienum sumpsi, præterquam ex prioribus nouem Elementis Euclidis. Vt huius libri beneficio vtaris, tradam breuiter, sex faciliora quædam mathemata, singula pro singulis elementis, per quæ possis, lectos quosque titulos propositionum, numerosis exemplis confirmare, nostrasque demonstrationes, arithmeticæ artis certitudine, præuenire.

Caput Primum.

Primum est, pro primo elemento: constructio potestatum cuiuslibet numeri binomij, vel residui. Est autem cuiusque numeri prima potestas, ipse numerus: secunda verò, est eiusdem numeri per se ipsum multiplicationis productus, quæ dicitur, quadratus: tertia, est productus primæ potestatis in secundam, quæ dicitur, cubus: quarta, est productus primæ potestatis in tertiam, quæ dicitur, quadroquadratus: quinta, est productus primæ potestatis in quartam: & sic deinceps in infinitum.

Potestates numerorum, vsque ad decimam, & vsque ad potestates denarij, sequens exhibet tabella.

Numerorum *Poteſtates.*

Prima	*Secunda*	*Tertia*	*Quarta*	*Quinta*
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049
10	100	1000	10000	100000

Numerorum *Poteſtates.*

	Sexta	*Septima*	*Octaua*
2	64	128	256
3	729	2187	6561
4	4096	16384	65536
5	15625	78125	390625
7	46656	279936	1679616
7	117649	823543	5764801
8	262144	2097152	16777216
9	531441	4782969	43046721
10	1000000	10000000	100000000

No-

Numerorum Potestates.

	Nona	Decima
2	512	1024
3	19683	59049
4	262144	1048576
5	1953125	9765625
6	10077696	60466176
7	40353607	282475249
8	134217728	1073741824
9	387420489	3486784401
10	1000000000	10000000000

Porrò cum Franciſcó Viettæ, alijſque placuerit Analyſtis, indeterminatum quemque determinabilem numerum, eiuſque priorem poteſtatem, cuiuſpiam ſimplicis litteræ charactere ſignificare: placuit conſequenter, indeterminatas determinabiles eiuſdem numeri poteſtates alias, eiuſdem litteræ charactere ſignificare, numeris dextrorſum adſcriptis, indicantibus, quota quæque ſit poteſtas. vt exempli gratia, cum indeterminati numeri determinabilis prima poteſtas fuerit notata charactere litteræ *t*; ſecunda poteſtas, charactere ſignificabitur *t2*; tertia poteſtas, charactere *t3*; quarta, *t4*; quinta, *t5*: & ſic deinceps. cum verò determinatus fuerit litteræ *t*, valor ternarius, 3: tunc determinatus erit characteris *t2*, valor 9; characteris *t3*, valor 27; characteris *t4*, valor 81; characteris *t5*, valor 243: & ſic deinceps.

Placuit etiam duorum indeterminatorum determinabilium numerorum poteſtatibus inuicem multiplicatis, productos, pariter indeterminatos & determinabiles numeros, iiſdem characteribus producentiũ ſignificare deinceps conſcriptis, vt ex multiplicatione *a* per *r*, productum *ar*; & ex multiplicatione *a2* per *r*, productum *a2r*, & ex multiplicatione *a* per *r2*, productum *ar2*.

Quibus characteribus à Vietta, Herigonio, Beugrand penes Cauallerium, vſitatis, conuenientia nos adinuenimus nomina. Nam productum *ar*, ex multiplicatione primarum poteſtatum *a*, & *r*, vocamus, Vniprimam: & productum *a2r*, ex multiplicatione ſecundæ poteſtatis *a*, per primam *r*, vocamus, Biprimam: productum verò *ar2*, ex multiplicatione primæ *a*, per ſecundam *r*, vocamus, Vniſecundam: & *a3r*, productum tertiæ *a*, per primam *r*, vocamus, Triprimam: & *a2r2*, ſecundæ *a*, per ſecundam *r*, Biſecundam: & *ar3*, primæ *a*, per tertiam *r*, Vnitertiam: item *a4r*, Quadriprimam: *a3r2*, Triſecundam: *a2r3*, Bitertiam: *ar4*, Vniquartam. & ſic reliquas

a5r, Quintiprimam.
a4r2, Quadriſecundam.
a3r3, Tritertiam.
a2r4, Biquartam.
ar5, Vniquintam.
a6r, Sextiprimam.
a5r2, Quintiſecundam.
a4r3, Quadritertiam.
a3r4, Triquartam.
a2r5, Biquintam.
ar6, Vniſextam.
a7r, Septimiprimam.
a6r2, Sextiſecundam.
a5r3, Quintitertiam.
a4r4, Quadriquartam.
a3r5, Triquintam.

a2r6,

a2r6, Bisextam.
ar7, Vniseptimam.
a8r, Octauiprimam.
a7r2, Septimisecundam.
a6r3, Sextitertiam.
a5r4, Quintiquartam.
a4r5, Quadriquintam.
a3r6, Trisextam.
a2r7, Biseptimam.
ar8, Vniocłauam.
a9r, Noniprimam.
a8r2, Octauisecundam.
a7r3, Septimitertiam.
a6r4, Sextiquartam.
a5r5, Quintiquintam.
a4r6, Quadrisextam.
a3r7, Triseptimam.
a2r8, Bioctauam.
ar9, Vninonam.

Quare si litteræ *a*, taxatus fuerit valor 3, & litterę *r*, valor 2; erit characteris *ar* vniprimæ, valor 6, productus multiplicationis 3 per 2: erit deinde characteris *a2*, valor 9; & characteris *a2r* biprimæ, valor 18: item characteris *r2*, valor erit 4; & characteris *ar2* vnisecundæ, valor 12: & sic deinceps.

Itaque sicut Euclides in 2. 8. numerosam triangularem tabulam instituit proportionalium ab vnitate, datisque minimis in numeris, datam inter se rationem habentibus: ita eadem methodo, placuit litteratam triangularem tabulam disponere proportionalium characterum, à data vnitate, propositisque duobus indeterminatis determinabilibus numeris, indeterminatam inter se rationem habentibus. Pro charactere autem vnitatis, litteram *u* collocauimus, in vertice triangularis tabulæ, & pro indeterminatis determinabilibus numeris, duas litteras *a*, & *r*.

Ta-

Tabula autem proportionalium, eſt quæ ſequitur, à vertice vſque ad decimam extenſa baſim, in qua vndecim cenſentur proportionales, in eadem ratione *a* ad *r*.

Tabula Proportionalium.

u
a r
a2 ar r2
a3 a2r ar2 r3
a4 a3r a2r2 ar3 r4
a5 a4r a3r2 a2r3 ar4 r5
a6 a5r a4r2 a3r3 a2r4 ar5 r6
a7 a6r a5r2 a4r3 a3r4 a2r5 ar6 r7
a8 a7r a6r2 a5r3 a4r4 a3r5 a2r6 ar7 r8
a9 a8r a7r2 a6r3 a5r4 a4r5 a3r6 a2r7 ar8 r9
a10 a9r a8r2 a7r3 a6r4 a5r5 a4r6 a3r7 a2r8 ar9 r10.

In qua tabula, quoniam litteræ *u*, valor est vnitas: si litteræ *a*, valor fuerit 3; litteræ verò *r*, valor 2: reliquorum characterum valores ordinantur similiter in simili tabula, quàm præcipit Euclides in præcitata prop. 2. 8. Elem.

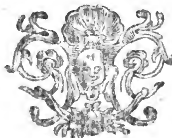
Tabula Proportionalium Eucl. Elem. 2. 8.

1.
2. 3.
4. 6. 9.
8. 12. 18. 24.
16. 24. 36. 54. 81.
32. 48. 72. 108. 162. 243.
64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.
128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187.
256. 384. 576. 864. 1296. 1944. 2916. 4374. 6561.
512. 768. 1152. 1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.
1024. 1536. 2304. 3456. 5184. 7776. 11664. 17496. 26244. 39366. 59049.

Pla-

Placuit demum ijsdem Analystis, ex numero indeterminato, & determinabili (siue potestate, siue ex potestatibus producto) & ex determinato numero, per multiplicationem factum productum indeterminatum pariter atque determinabilem, eodem producentis charactere significari, præscripto numero multiplicationis. vt *3a2r*, triplum productum sub secunda potestate numeri *a*, & sub prima numeri *r*; vel triplam biprimam: & *10a2r3*, decuplum productum sub secunda potestate numeri *a*, & sub tertia numeri *r*; vel decuplam bitertiam. & sic de reliquis.

Præter tabulam proportionalium prædictam, oportet aliam tabulam triangularem habere in promptu, quam Analystæ vocant, multiplicium tabulam: in qua vnitates in vertice ordinantur, & in lateribus; in area verò numeri, quorum vnisquisque inferioris basis numerus, duorũ, sibi, quasi cornua fronti, adiacentium superioris basis numerorum est aggregatum: vt ex ipsius tabulæ patebit lectura; quam exponimus extensam, à vertice vsque ad decimam basim.



Ta-

Tabula Multiplicium.

1.
1. 1.
1. 2. 1.
1. 3. 3. 1.
1. 4. 6. 4. 1.
1. 5. 10. 10. 5. 1.
1. 6. 15. 20. 15. 6. 1.
1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1.
1. 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1.
1. 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. 1.
1. 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. 1.

Vtrisque tabulis proportionalium & multiplicium ita compositis, vt congruant, vertex vertici, latera lateribus, bases basibus æqueordinatis, & vt singulæ proportionales con-

Esto litteræ *a*, valor 2.
litteræ *r*, valor 3.
ideoque characteris *a+r*, valor 5.

	$a2$:	4
	$2ar$:	12
	$r2$:	9
Secunda potestas à	5 :	25
	$a3$:	8
	$3a2r$:	36
	$3ar2$:	54
	$r3$:	27
Tertia potestas à	5:	125
	$a4$:	16
	$4a3r$:	96
	$6a2r2$:	216
	$4ar3$:	216
	$r4$:	81
Quarta potestas à	5 :	625

Residuus dicitur numerus, qui duorum inæqualium numerorum, relinquitur, à maiore, minore subtracto; à quibus denominatur. vt numerus binarius, tunc residuus dicetur



tur; cum à quinario, ternario dempto, relictus fuerit; & à quinario atque ternario denominatus. Characterem autem residui numeri, placuit, ex characteribus totius & abscissi denotari, à quibus denominatur, lineola, interueniente, quæ signum est subtractionis posterioris characteris à priore. vt 5 --- 3, valet perinde atque 2. Similiter si duo numeri, à quibus residuus denominatur, fuerint indeterminati, *t* maior, *a* minor, residuus charactere significabitur ex vtrisque *t*—*a*.

Itaque sicut *t*—*a*, prima suijpsius potestas, fit ex nominibus *t*, *a*, in prima basi tabulæ nominum iacentibus; ita secunda potestas eiusdem residui *t*—*a*, fit ex nominibus in secunda basi, alternatim additis, & subtractis, *t2*---*2ta* +*a2*; tertia, ex nominibus, in tertia basi *t3*---*3t2a*+ *3ta2* ---*a3*; quarta, ex nominibus, in quarta basi *t4*---*4t3a*+*6t2a2* --- *4ta3* +*a4*: & reliquæ deinceps potestates, fiunt similiter ex nominibus, in reliquis deinceps basibus iacentibus.

Huc pariter innumerabilia pertinent huiusmodi theoremata. Si à toto quodam maiore numero, quisque minor numerus abscissus fuerit: residui secunda potestas relinquitur, ex secunda potestate totius; dempto duplo producto sub toto & abscisso, idest, dempta dupla vniprima; addita secunda potestate abscissi: tertia potestas residui, relinquitur, ex tertia potestate totius; dempto triplo producto sub secunda potestate totius & sub prima abscissi, idest dempta tripla biprima; addito triplo producto sub prima

totius

totius & sub secunda abscissi, idest addita tripla vnitecunda; dempta tertia potestate abscissi: quarta residui, relinquitur, ex quarta totius; dempto quadruplo producto sub tertia totius, & sub prima abscissi, idest, dempta quadrupla triprima; addito sexcuplo producto sub secundis potestatibus totius & abscissi, idest, addita sexcupla bisecunda; dempto quadruplo producto sub prima totius, & sub tertia abscissi, idest dempta quadrupla vnitertia; addita quarta abscissi. aliaque similia, quorum præstat characteres oculis intueri, quàm voces legere.

Potestates residui $t - a$.

Prima $t - a$.

Secunda $t2 - 2ta + a2$.

Tertia $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.

Quarta $t4 - 4t3a + 6t2a2 - 4ta3 + a4$.

Quinta $t5 - 5t4a + 10t3a2 - 10t2a3 + 5ta4 - a5$.

Sexta $t6 - 6t5a + 15t4a2 - 20t3a3 + 15t2a4 - 6ta5 + a6$.

Septima $t7 - 7t6a + 21t5a2 - 35t4a3 + 35t3a4 - 21t2a5 + 7ta6 - a7$.

Octaua $t8 - 8t7a + 28t6a2 - 56t5a3 + 70t4a4 - 56t3a5 + 28t2a6 - 8ta7 + a8$.

Nona $t9 - 9t8a + 36t7a2 - 84t6a3 + 126t5a4 - 126t4a5 + 84t3a6 - 36t2a7 + 9ta8 - a9$.

Decima $t10 - 10t9a + 45t8a2 - 120t7a3 + 210t6a4 - 252t5a5 + 210t4a6 - 120t3a7 + 45t2a8 - 10ta9 + a10$.

Quæ similiter demonstrabuntur facile per inductionem, determinato cuiusque litteræ valore.

Esto litteræ t, valor 5.
litteræ a valor 3.
ideoque characteris $t - a$, valor 2.

$t2$:	25	$2ta$:	30
$a2$:	9		

34
30

Secunda potestas à 2: 4

$t3$:	125	$3t2a$:	225
$3ta2$:	135	$a3$:	27
	260		252
	252		

Tertia potestas à 2: 8

$t4$:	625	$4t3a$:	1500
$6t2a2$:	1350	$4ta3$.	540
$a4$:	81		
	2056		2040
	2040		

Quarta potestas à 2: 16 Si-

Similibus exemplis poteſt confirmari, tota conſtructionis poteſtatum ars, à binomijs, & reſiduis: quàm pro quantitatibus omnifariam, in primo noſtro elemento pleniùs oſtendimus.

Caput 2.

Secundum, pro ſecundo eſt elemento: multifariam progreſſiuorum regulares collectiones; in quibus præcipua noſtri inuenti pars eſt. Accipiatur quilibet numerus, cuius abſcindantur ordinatim vnitas, binarius, ternarius, & deinceps quicunque numeri poſſunt abſcindi, vt vel numerus, vel ſaltem vnitas relinquatur: & reſidui vſque ad vnitatem, totidem ſaluentur, quot abſciſſi, ſinguli reſidui è regione ſuorum abſciſſorum.

Placuit autem acceptum numerum vocare quantitatem totam, & ſignificare littera *t*: eiuſque poteſtates vocare totas; *t2*, totam ſecundam; *t3*, totam tertiam; *t4* totam quartam; & ſic deinceps. placuit etiam acceptos abſciſſos vocare quantitates abſciſſas, & ſignificare littera *a*: item abſciſſorum poteſtates, vocare abſciſſas; *a2*, abſciſſam ſecundam; *a3*, abſciſſam tertiam; *a4*, abſciſſam quartam; & deinceps: reſiduos quoque placuit vocare, quantitates reſiduas, & ſignificare littera *r*: item reſiduorum poteſtates, vocare reſiduas; *r2*, reſiduam ſecundam; *r3*, reſiduam tertiam; *r4*, reſiduam quartam; & deinceps. denique ſub poteſtatibus cuiuſque abſciſſæ, & ſuæ reſiduæ, placuit productos denominare vt ſupra, *ar* vniprimas, *a2r* biprimas, *ar2* vniſecundas, *a3r* triprimas, *a2r2* biſecun-

ſecundas, *ar3* vnitertias, & ſic deinceps.

Sed ecce tabula, in qua cuiuſque numeri ab vnitate vſque primùm ad 7. deinde vſque ad 10. pro vnaqualibet abſciſſa, ſcripta eſt è regione reſidua, & abſciſſa ſecunda, & vniprima, & reſidua ſecunda, & abſciſſa tertia, & biprima, & vniſecunda, & reſidua tertia, & ſic deinceps vſque ad proportionales in decima baſi tabulæ proportionalium iacentes.



t	*a*	*r*	a^2	*ar*	r^2	a^3	a^2r
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	1	2	4	1	2
	2	1	4	2	1	8	4
4	1	3	1	3	9	1	3
	2	2	4	4	4	8	8
	3	1	9	3	1	27	9
5	1	4	1	4	16	1	4
	2	3	4	6	9	8	12
	3	2	9	6	4	27	18
	4	1	16	4	1	64	16
6	1	5	1	5	25	1	5
	2	4	4	8	16	8	16
	3	3	9	9	9	27	27
	4	2	16	8	4	64	32
	5	1	25	5	1	125	25
7	1	6	1	6	36	1	6
	2	5	4	10	25	8	20
	3	4	9	12	16	27	36
	4	3	16	12	9	64	48
	5	2	25	10	4	125	50
	6	1	36	6	1	216	36

t	ar2	r3	a4	a3r	a2r2	ar3
2	1	1	1	1	1	1
3	4	8	1	2	4	8
	2	1	16	8	4	2
4	9	27	1	3	9	27
	8	8	16	16	16	16
	3	1	81	27	9	3
5	16	64	1	4	16	64
	18	27	16	24	36	54
	12	8	81	54	36	24
	4	1	256	64	16	4
6	25	125	1	5	25	125
	32	64	16	32	64	128
	27	27	81	81	81	81
	16	8	256	128	64	32
	5	1	625	125	25	5
7	36	216	1	6	36	216
	50	125	16	40	100	250
	48	64	81	108	144	192
	36	27	256	192	144	108
	20	8	625	250	100	40
	6	1	1296	216	36	6

t	r4	a5	a4r	a3r2	a2r3	ar4
2	1	1	1	1	1	1
3	16	1	2	4	8	16
	1	32	16	8	4	2
4	81	1	3	9	27	81
	16	32	32	32	32	32
	1	243	81	27	9	3
5	256	1	4	16	64	256
	81	32	48	72	108	162
	16	243	162	108	72	48
	1	1024	256	64	16	4
6	625	1	5	25	125	625
	256	32	64	128	256	512
	81	243	243	243	243	243
	16	1024	512	256	128	64
	1	3125	625	125	25	5
7	1296	1	6	36	216	1296
	625	32	80	200	500	1250
	256	243	324	432	576	768
	81	1024	768	576	432	324
	16	3125	1250	500	200	80
	1	7776	1296	216	36	6

t	r5	a6	a5r	a4r2	a3r3
2	1	1	1	1	1
3	32	1	2	4	8
	1	64	32	16	8
4	243	1	3	9	27
	32	64	64	64	64
	1	729	243	81	27
5	1024	1	4	16	64
	243	64	96	144	216
	32	729	486	324	216
	1	4096	1024	256	64
6	3125	1	5	25	125
	1024	64	128	256	512
	243	729	729	729	729
	32	4096	2048	1024	512
	1	15625	3125	625	125
7	7776	1	6	36	216
	3125	64	160	400	1000
	1024	729	972	1296	1728
	243	4096	3072	2304	1728
	32	15625	6250	2500	1000
	1	46656	7776	1296	216

t	*a2r4*	*ar5*	*r6*	*a7*	*a6r*
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	1	2
	4	2	1	128	64
4	81	243	729	1	3
	64	64	64	128	128
	9	3	1	2187	729
5	256	1024	4096	1	4
	324	486	729	128	192
	144	96	64	2187	1458
	16	4	1	16384	4096
6	625	3125	15625	1	5
	1024	2048	4096	128	256
	729	729	729	2187	2187
	256	128	64	16384	8192
	25	5	1	78125	15625
7	1296	7776	46656	1	6
	2500	6250	15625	128	320
	2304	3072	4096	2187	2916
	1296	972	729	16384	12288
	400	160	64	78125	31250
	36	6	1	279936	46656

t	a5r2	a4r3	a3r4	a2r5	ar6
2	1	1	1	1	1
3	4	8	16	32	64
	32	16	8	4	2
4	9	27	81	243	729
	128	128	128	128	128
	243	81	27	9	3
5	16	64	256	1024	4096
	288	432	648	972	1458
	972	648	432	288	192
	1024	256	64	16	4
6	25	125	625	3125	15625
	512	1024	2048	4096	8192
	2187	2187	2187	2187	2187
	4096	2048	1024	512	256
	3125	625	125	25	5
7	36	216	1296	7776	46656
	800	2000	5000	12500	31250
	3888	5184	6912	9216	12288
	9216	6912	5184	3888	2916
	12500	5000	2000	800	320
	7776	1296	216	36	6

t	r7	a8	a7r	a6r2	a5r3
2	1	1	1	1	1
3	128	1	2	4	8
	1	256	128	64	32
4	2187	1	3	9	27
	128	256	256	526	256
	1	6561	2187	729	243
5	16384	1	4	16	64
	2187	256	384	576	864
	128	6561	4374	2916	1944
	1	65536	16384	4096	1024
6	78125	1	5	25	125
	16384	256	512	1024	2048
	2187	6561	6561	6561	6561
	128	65536	32768	16384	8192
	1	390625	78125	15625	3125
7	279936	1	6	36	216
	78125	256	640	1600	4000
	16384	6561	8748	11664	15552
	2187	65536	49152	36864	27648
	128	390625	156250	62500	25000
	1	1679616	279936	46656	7776

t	a^4r^4	a^3r^5	a^2r^6	ar^7	r^8
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	128	256
	16	8	4	2	1
4	81	243	729	2187	6561
	256	256	256	256	256
	81	27	9	3	1
5	256	1024	4096	16384	65536
	1296	1944	2916	4374	6561
	1296	864	576	384	256
	256	64	16	4	1
6	625	3125	15625	78125	390625
	4096	8192	16384	32768	65536
	6561	6561	6561	6561	6561
	4096	2048	1024	512	256
	625	125	25	5	1
7	1296	7776	46656	279936	1679616
	10000	25000	62500	156250	390625
	20736	27648	36864	49152	65536
	20736	15552	11664	8748	6561
	10000	4000	1600	640	256
	1296	216	36	6	1

r	a9	a8r	a7r2	a6r3
2	1	1	1	1
3	1	2	4	8
	512	256	128	64
4	1	3	9	27
	512	512	512	512
	19683	6561	2187	729
5	1	4	16	64
	512	768	1152	1728
	19683	13122	8748	5832
	262144	65536	16384	4096
6	1	5	25	125
	512	1024	2048	4096
	19683	19683	19683	19683
	262144	131072	65536	32768
	1953125	390625	78125	15625
7	1	6	36	216
	512	1280	3200	8000
	19683	26244	34992	46656
	262144	196608	147456	110592
	1953125	781250	312500	125000
	10077696	1679616	279936	46656

t	a^5r^4	a^4r^5	a^3r^6	a^2r^7	ar^8
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	128	256
	32	16	8	4	2
4	81	243	729	2187	6561
	512	512	512	512	512
	243	81	27	9	3
5	256	1024	4096	16384	65536
	2592	3888	5832	8748	13122
	3888	2592	1728	1152	768
	1024	256	64	16	4
6	625	3125	15625	78125	390625
	8192	16384	32768	65536	131072
	19683	19683	19683	19683	19683
	16384	8192	4096	2048	1024
	3125	625	125	25	5
7	1296	7776	46656	279936	1679616
	20000	50000	125000	312500	781250
	62208	82944	110592	147456	196608
	82944	62208	46656	34992	26244
	50000	20000	8000	3200	1280
	7776	1296	216	36	6

r	r9	a10	a9r	a8r2
2	1	1	1	1
3	512	1	2	4
	1	1024	512	256
4	19683	1	3	9
	512	1024	1024	1024
	1	59049	19683	6561
5	262144	1	4	16
	19683	1024	1536	2304
	512	59049	39366	26244
	1	1048576	262144	65536
6	1953125	1	5	25
	262144	1024	2048	4096
	19683	59049	59049	59049
	512	1048576	524288	262144
	1	9765625	1953125	390625
7	10077696	1	6	36
	1953125	1024	2560	6400
	262144	59049	78732	104976
	19683	1048576	786432	589824
	512	9765625	3906250	1562500
	1	60466176	10076696	1679616

t	a7r3	a6r4	a5r5	a46r
2	1	1	1	1
3	8	16	32	64
	128	64	32	16
4	27	81	243	729
	1024	1024	1024	1024
	2187	729	243	81
5	64	256	1024	4096
	3456	5184	7776	11664
	17496	11664	7776	5184
	16384	4096	1024	256
6	125	625	3125	15265
	8192	16384	32768	65536
	59049	59049	59049	59049
	131072	65536	32768	16384
	78125	15625	3125	625
7	216	1296	7776	46656
	16000	40000	100000	250000
	139968	186624	248832	331776
	442368	331776	248832	186624
	625000	250000	100000	40000
	279936	46656	7776	1296

t	a3r7	a2r8	ar9	r10
2	1	1	1	1
3	128	256	512	1024
	8	4	2	1
4	2187	6561	19683	59049
	1024	1024	1024	1024
	27	9	3	1
5	16384	65536	262144	1048576
	17496	26244	39366	59049
	3456	2304	1536	1024
	64	16	4	1
6	78125	390625	1953125	9765625
	131072	262144	524288	1048576
	59049	59049	59049	59049
	8192	4096	2048	1024
	125	25	5	1
7	279936	1679616	10077696	60466176
	625000	1562500	3906250	9765625
	442368	589824	786432	1048576
	139968	104976	78732	59049
	16000	6400	2560	1024
	216	36	6	1

Sequitur Tabula pro numeris 8, 9, & 10.

t	a	r	a2	ar	r2	a3	a2r
8	1	7	1	7	49	1	7
	2	6	4	12	36	8	24
	3	5	9	15	25	27	45
	4	4	16	16	16	64	64
	5	3	25	15	9	125	75
	6	2	36	12	4	216	72
	7	1	49	7	1	343	49
9	1	8	1	8	64	1	8
	2	7	4	14	49	8	28
	3	6	9	18	36	27	54
	4	5	16	20	25	64	80
	5	4	25	20	16	125	100
	6	3	36	18	9	216	108
	7	2	49	14	4	343	98
	8	1	64	8	1	512	64
10	1	9	1	9	81	1	9
	2	8	4	16	64	8	32
	3	7	9	21	49	27	63
	4	6	16	24	36	64	96
	5	5	25	25	25	125	125
	6	4	36	24	16	216	144
	7	3	49	21	9	343	147
	8	2	64	16	4	512	128
	9	1	81	9	1	729	81

t	ar^2	r^3	a^4	a^3r	a^2r^2	ar^3
8	49	343	1	7	49	343
	72	216	16	48	144	432
	75	125	81	135	225	375
	64	64	256	256	256	256
	45	27	625	375	225	135
	24	8	1296	432	144	48
	7	1	2401	343	49	7
9	64	512	1	8	64	512
	98	343	16	56	196	686
	108	216	81	162	324	648
	100	125	256	320	400	500
	80	64	625	500	400	320
	54	27	1296	648	324	162
	28	8	2401	686	196	56
	8	1	4096	512	64	8
10	81	729	1	9	81	729
	128	512	16	64	256	1024
	147	343	81	189	441	1029
	144	216	256	384	576	864
	125	125	625	625	625	625
	96	64	1296	864	576	384
	63	27	2401	1029	441	189
	32	8	4096	1024	256	64
	9	1	6561	729	81	9

t	r^4	a^5	a^4r	a^3r^2	a^2r^3	ar^4
8	2401	1	7	49	343	2401
	1296	32	96	288	864	2592
	625	243	405	675	1125	1875
	256	1024	1024	1024	1024	1024
	81	3125	1875	1125	675	405
	16	7776	2592	864	288	96
	1	16807	2401	343	49	7
9	4096	1	8	64	512	4096
	2401	32	112	392	1372	4802
	1296	243	486	972	1944	3888
	625	1024	1280	1600	2000	2500
	256	3125	2500	2000	1600	1280
	81	7776	3888	1944	972	486
	16	16807	4802	1372	392	112
	1	32768	4096	512	6	8
10	6561	1	9	81	729	6561
	4096	32	128	512	2048	8192
	2401	243	567	1323	3087	7203
	1296	1024	1536	2304	3456	5184
	625	3125	3125	3125	3125	3125
	256	7776	5184	3456	2304	1536
	81	16807	7203	3087	1323	567
	16	32768	8192	2048	512	128
	1	59049	6561	729	81	9

t	r5	a6	a5r	a4r2	a3r3
8	16807	1	7	49	343
	7776	64	192	576	1728
	3125	729	1215	2025	3375
	1024	4096	4096	4096	4096
	243	15625	9375	5625	3375
	32	46656	15552	5084	1728
	1	117649	16807	401	343
9	32768	1	8	64	512
	16807	64	224	784	2744
	7776	729	1458	2916	5832
	3125	4096	5120	6400	8000
	1024	15625	12500	10000	8000
	243	46656	233 8	11664	5832
	32	117649	33614	9604	2744
	1	262144	32768	4096	512
10	59049	1	9	81	729
	32768	64	256	1024	4096
	16807	729	1701	3969	9261
	7776	4096	6144	9216	13824
	3125	15625	15625	15625	15625
	1024	46656	31104	20736	13824
	243	117649	50421	21609	9261
	32	262144	65536	16384	4096
	1	531441	59049	6561	729

t	*a2r4*	*ar5*	*r6*	*a7*	*a6r*
8	2401	16807	117649	1	7
	5084	15552	46656	128	384
	5625	9375	15625	2187	36 5
	4096	4096	4096	16384	16384
	2025	1215	729	78125	46875
	576	192	64	279936	93312
	49	7	1	823543	117649
9	4096	32768	262144	1	8
	9604	33614	117649	128	448
	11664	23328	46656	2187	4374
	10000	12500	15625	16384	20480
	6400	5120	4096	78125	62500
	2916	1458	729	279936	139968
	784	224	64	823543	235298
	64	8	1	2097152	262144
10	6561	59049	531441	1	9
	16384	65536	262144	128	512
	21609	50421	117649	2187	5103
	20736	31104	46656	16384	24576
	15625	15625	15625	78125	78125
	9216	6144	4096	279936	186624
	3969	1701	729	823543	352947
	1024	256	64	2097152	524288
	81	9	1	4782969	531441

a5r2

t	a5r2	a4r3	a3r4	a2r5	ar6	r7
8	49	343	2401	16807	117649	823543
	1152	3456	10168	31104	93312	279936
	6075	10125	16875	28125	46875	78125
	16384	16384	16384	16384	16384	16384
	28125	16875	10125	6075	3645	2187
	31104	10168	3456	1152	384	128
	16807	2401	343	49	7	1
9	64	512	4096	32768	262144	2097152
	1568	5488	19208	67228	235298	823543
	8748	17496	34992	69984	139968	279936
	25600	32000	40000	50000	62500	78125
	50000	40000	32000	25600	20480	16384
	69984	34992	17496	8748	4374	2187
	67228	19208	5488	1568	448	128
	32768	4096	512	64	8	1
10	81	729	6561	59049	531441	4782969
	2048	8192	32768	131072	524288	2097152
	11907	27783	64827	151263	352947	823543
	36864	55296	82944	124416	186624	279936
	78125	78125	78125	78125	78125	78125
	124416	82944	55296	36864	24576	16384
	151263	64827	27783	11907	5103	2187
	131072	32768	8192	2048	512	128
	59049	6561	729	81	9	1

t	a8	a7r	a6r2	a5r3	a4r4
8	1	7	49	343	2401
	256	768	2304	6912	19936
	6561	10935	18225	30375	50625
	65536	65536	65536	65536	65536
	390625	234375	140625	84375	50625
	1679616	559872	186624	61008	19936
	5764801	823543	117649	16807	2401
9	1	8	64	512	4096
	256	896	3136	10976	38416
	6561	13122	26244	52488	104976
	65536	81920	102400	128000	160000
	390625	312500	250000	200000	160000
	1679616	839808	419904	209952	104976
	5764801	1647086	470596	134456	38416
	16777216	2097152	262144	32768	4096
10	1	9	81	729	6561
	256	1024	4096	16384	65536
	6561	15309	35721	83349	194481
	65536	98304	147456	221184	331776
	390625	390625	390625	390625	390625
	1679616	1119744	746496	497664	331776
	5764801	2470629	1058841	453789	194481
	16777216	4194304	1048576	262144	65536
	43046721	4782969	531441	59049	6561

1	a^3r^5	a^2r^6	ar^7	r^8
8	16807	117649	823543	5764801
	61008	186624	559872	1679616
	84375	140625	234375	390625
	65536	65536	65536	65536
	30375	18225	10935	6561
	6912	2304	768	256
	343	49	7	1
9	32768	262144	2097152	16777216
	134456	470596	1647086	5764801
	209952	419904	839808	1679616
	200000	250000	312500	390625
	128000	102400	81920	65536
	52488	26244	13122	6561
	10976	3136	896	256
	512	64	8	1
10	59049	531441	4782969	43046721
	262144	1048576	4194304	16777216
	453789	1058841	2470629	5764801
	497664	746496	1119744	1679616
	390625	390625	390625	390625
	221184	147456	98304	65536
	83349	35721	15309	6561
	16384	4096	1024	256
	729	81	9	1

1	a9	a8r	a7r2	a6r3
8	1	7	49	343
	512	1536	6408	13824
	19683	32805	54675	91125
	262144	262144	262144	262144
	1953125	1171875	703125	421875
	10077696	3349232	1119744	366048
	40353607	5764861	823543	117649
9	1	8	64	512
	512	1792	6272	21952
	19683	39366	78732	157464
	262144	327680	409600	512000
	1953125	1562500	1250000	1000000
	10077696	5038848	2519424	1259712
	40353607	11529602	3294172	941192
	134217728	16777216	2097152	262144
10	1	9	81	729
	512	2048	8192	32768
	19683	45927	107163	250047
	262144	393216	589824	884736
	1953125	1953125	1953125	1953125
	10077696	6718464	4478976	2985984
	40353607	17294403	7411887	3175523
	134217728	33554432	8388608	2097152
	387420489	43046721	4782969	531441

t	a^5r^4	a^4r^5	a^3r^6	a^2r^7	ar^8
8	2401	16807	117549	823543	5764861
	39872	124416	366048	1119744	3349232
	151875	253125	421875	703125	1171875
	262144	262144	262144	262144	262144
	253125	151875	91125	54675	32805
	124416	39872	13824	4608	1536
	16807	2401	343	49	7
9	4096	32768	262144	2097152	16777216
	76832	268912	941192	3294172	11529602
	314928	629856	1259712	2519424	5038848
	640000	800000	1000000	1250000	1562500
	800000	640000	512000	409600	327680
	629856	314928	157464	78732	39366
	268912	76832	21952	6272	1792
	32768	4096	512	64	8
10	6561	59049	531441	4782969	43046721
	131072	524288	2097152	8388603	33554432
	583443	1361367	3176523	7411887	17294403
	1327104	1990656	2985984	4478976	6718464
	1953125	1953125	1953125	1953125	1953125
	1990656	1327104	884736	589824	393216
	1361367	583443	250047	107163	45927
	524288	131072	32768	8192	2048
	59049	6561	729	81	9

t	r9	a10	a9r	a8r2
8	40353607	1	7	49
	10077696	1024	3072	9216
	1953125	59049	98415	164025
	262144	1048576	1048576	1048576
	19683	9765625	5859375	3515625
	512	60466176	20155392	6698464
	1	282475249	40353607	5764861
9	134217728	1	8	64
	40353607	1024	3584	12544
	10077696	59049	118098	236196
	1953125	1048576	1310720	1638400
	262144	9765625	7812500	6250000
	19683	60466176	30233088	15116544
	512	282475249	80707214	23059204
	1	1073741824	134217728	16777216
10	387420489	1	9	81
	134217728	1024	4096	16384
	40353607	59049	137781	321489
	10077696	1048576	1572864	2359296
	1953125	9765625	9765625	9765625
	262144	60466176	40310784	26873856
	19683	282475249	121060821	51883209
	512	1073741824	268435456	67108864
	1	3486784401	387420489	43046721

I	a^7r^3	a^6r^4	a^5r^5	a^4r^6
8	343	2401	16807	117649
	27648	79744	248832	746496
	273375	455625	759375	1265625
	1048576	1048576	1048576	1048576
	2109375	1265625	759375	455625
	2196288	746496	248832	79744
	823543	117649	16807	2401
9	512	4096	32768	262144
	43904	153664	537824	1882384
	472392	944784	1889566	3779136
	2048000	2560000	3200000	4000000
	5000000	4000000	3200000	2560000
	7558272	3779136	1889566	944784
	6588344	1882384	537824	153664
	2097152	262144	32768	4096
10	729	6561	59049	531441
	65536	262144	1048576	4194304
	750141	1750329	4084101	9529569
	3538944	5308416	7962624	11943936
	9765625	9765625	9765625	9765625
	17915904	11943936	7962624	5308416
	22235661	9529569	4084101	1750329
	16777216	4194304	1048576	262144
	4782969	531441	59049	6561

t	a3r7	a2r8	ar9	r10
8	823543	5764861	40353607	282475249
	2196288	6698464	20155392	60466176
	2109375	3515625	5859375	9765625
	1048576	1048576	1048576	1048576
	164025	164025	98415	59049
	9216	9216	3072	1024
	49	49	7	1
9	2097152	16777216	134217728	1073741824
	6588344	23059204	80707214	282475249
	7558272	15116544	30233088	60466176
	5000000	6250000	7812500	9765625
	2048000	1638400	1310720	1048576
	472392	236196	118098	59049
	43904	12544	3584	1024
	512	64	8	1
10	4782969	43046721	387420489	3486784401
	16777216	67108864	268435456	1073741824
	22235661	51883209	121060821	282475249
	17915904	26873856	40310784	60466176
	9765625	9765625	9765625	9765625
	3538944	2359296	1572864	1048576
	750141	321489	137781	59049
	65536	16384	4096	1024
	729	81	9	1

In

In præcedenti tabula progressiuas quantitates expandimus: in sequenti colligimus, cuiusque numeri massas ex omnibus eiusdem appellationis proportionalibus, pro vnaquaque numeri abscissione supra singillatim acceptis: videlicet massam ex omnibus abscissis, quàm significamus charactere *O.a*; & massam ex omnibus residuis, *O.r*; & massam ex omnibus abscissis secundis *O.a2*; & massam ex omnibus vniprimis *O.ar*; & massam ex omnibus residuis secundis, *O.r3*; & reliquas deinceps, quatenus præcedens tabula expanditur.

	O.r	*O.r2*		*O.r3*	*O.ar2*	*O.r4*
r	*O.a*	*O.a2*	*O.ar*	*O.a3*	*O.a2r*	*O.a4*
2	1	1	1	1	1	1
3	3	5	4	9	6	17
4	6	14	10	36	20	98
5	10	30	20	100	50	354
6	15	55	35	225	105	979
7	21	91	56	441	196	2275
8	28	140	84	784	336	4676
9	36	204	120	1296	540	8772
10	45	285	165	2025	825	15333

t	O.ar3 O.a3r	O.a2r2.	O.r5 O.a5	O.ar4 O.a4r	O.a2r3. O.a3r2	O.r6 O.a6
2	1	1	1	1	1	1
3	10	8	33	18	12	65
4	46	34	276	116	68	794
5	146	104	1300	470	260	4890
6	371	259	4425	1449	777	20515
7	812	560	12201	3724	1960	67171
8	1596	1092	29008	8400	4368	184820
9	2892	1968	61776	17172	8856	446964
10	4917	3333	120825	32505	16665	978405

t	O.ar5 O.a5r	O.a2r4 O.a4r2	O.a3r3	O.r7 O.a7	O.ar6 O.a6r
2	1	1	1	1	1
3	34	20	16	129	66
4	310	154	118	2316	860
5	1610	740	560	18700	5750
6	6035	2659	2003	96825	26265
7	18236	7832	5888	376761	93436
8	47244	19856	14988	1200304	278256
9	109020	45528	34176	3297456	725220
10	229845	95205	71445	8080425	1703625

t	O.a2r5 / O.a5r2	O.a3r4 / O.a4r3	O.r8 / O.a8	O.ar7 / O.a7r	O.a2r6 / O.a6r2
2	1	1	1	1	1
3	36	24	257	130	68
4	380	236	6818	2446	994
5	2300	1400	72354	21146	7604
6	9945	6009	462979	117971	39619
7	34216	20608	2142595	494732	159320
8	99696	59752	7907396	1695036	531012
9	255960	153792	24684612	4992492	1534488
10	594825	357225	67731333	13072917	3963333

t	O.a3r5 / O.a5r3	O.a4r4	O.r9 / O.a9	O.ar8 / O.a8r
2	1	1	1	1
3	40	32	513	258
4	526	418	20196	7076
5	3896	3104	282340	79430
6	20051	16003	2235465	542409
7	80192	64064	12313161	2685004
8	265356	211460	52666768	10582460
9	769152	614976	186884496	35277012
10	1984917	1587334	574304985	103008345

t	O.a2r7 O.a7r2	O.a3r6 O.a6r3	O.a4r5 O.a5r4	O.r10 O.a10
2	1	1	1	1
3	132	72	48	1025
4	2708	1268	836	60074
5	26300	11720	7760	1108650
6	165417	72297	48009	10874275
7	778120	337120	224224	71340451
8	2967888	1273008	851640	353815700
9	9655416	4154976	2766692	1427557524
10	27720825	11912505	7936665	4914341925

t	O.ar9 O.a9r	O.a2r8 O.a8r2	O.a3r7 O.a7r3
2	1	1	1
3	514	260	136
4	20710	7594	3238
5	303050	94100	37400
6	2538515	715939	276563
7	14850676	3943352	1503488
7	67518444	17200816	6479148
9	254402940	63090168	23809576
10	828707925	201375525	75832725

1	0.a4r6 0.a6r4	0.a5r5.
2	1	1
3	80	64
4	1834	1510
5	21200	17600
6	157269	130835
7	856352	713216
8	3716116	3098604
9	13596208	11320316
10	43292325	35844325

His paratis, experire, ſi vera ſunt, quæ proponimus theoremata, ſub 5. 2. exempli gratia, tertium.

0.6a2: 2t3—3t2+t.

ideſt, maſſa ex omnibus ſexcuplis abſciſſis ſecundis cuiuſq; totæ, eſt æqualis duplæ totæ tertiæ, dempta tripla tota ſecunda, addita ipſa tota.

Nota, quod interpunctio colon (:) nobis vſuuenit ad ſignificandam æqualitatem.

Eſto

Esto tota	t:	7
ideoque	$t2$:	49
	$t3$:	343
	$O.a2$:	91
	$2t3$:	686
	t:	7
	$2t3+t$:	693
	$-3t2$:	147
	$O.6a2$:	546

Item quartum $O.6ar$: $t3-t$:
ideſt, maſſa ex omnibus ſexcuplis vniprimis cuiuſque totæ, eſt æqualis totæ tertiæ, dempta ipſa tota.

Eſto tota	t:	9
ideoque	$t3$:	729
	$O.ar$:	120
	$t3$:	729
	$-t$:	9
	$O.6ar$:	720

Item decimumſextum

$O.42o43r3$: $3t7+7t3-10t$.

Eſto

Esto tota	t:	10
ideoque	$t3$:	1000
	$t7$:	10000000
	$O.a3r3$:	71445
	$3t7$:	30000000
	$7t3$:	7000
	$3t7+7t3$:	30007000
	$-10t$:	100
	60)	30006900
	7)	500115
	$Oa3r3$:	71445

Similiter alia ſub eadem 5. 2. atque ſub alijs eiuſdem elementi propoſitionibus theoremata facile poteris probare, ope tabularum præcedentium.

Sed ne quidquam tibi deſit, accipe, pro huius capitis coronide, tabellam ſpecioſam, expenſam, vſque ad decimam baſim. Vocamus autem ſpeciem vnamquamlibet maſſam, in qua colliguntur cuiuſque totæ, omnes, eiuſdem appellationis proportionales, pro ſingulis abſciſſionibus acceptæ: & ex ſpeciebus ordinatam tabulam triangularem ſimilem tabulæ proportionalium, ſpecioſam nuncupamus.

Ta-

Tabula Speciosa.

O.u.

O.a O.r.

O.a2 O.ar O.r2.

O.a3 O.a2r O.ar2 O.r3.

O.a4 O.a3r O.a2r2 O.ar3 O.r4.

O.a5 Oa4r O.a3r2 O.a2r3 O.ar4 O.r5.

O.a6 O.a5r O.a4r2 O.a3r3 O.a2r4 O.ar5 O.r6.

O.a7 O.a6r O.a5r2 O.a4r3 O.a3r4 O.a2r5 O.ar6. O.r7.

O.a8 O.a7: O.a6r2 O.a5r3 O.a4r4 O.a3r5 O.a2r6 O.ar7 O.r8.

O.a9 O.a8r O.a7r2. O.a6r3 O.a5r4 O.a4r5 O.a3r6 O.a2r7 O.ar8 O.r9.

O.a10 O.a9r O.a8r2 O.a7r3 O.a6r4 O.a5r5 O.a4r6 O.a3r7 O.a2r8 O.ar9 O.r10.

Cap.

Cap. 3.

Tertium pro tertio elemento, est quædam animaduersio indeterminatarum determinabilium rationum: quarum te iam habere conceptum, facilè demonstro; vt interim animaduertas.

Cum scripsero *O.a*, statim ex præcedenti capite habes massam ex omnibus abscissis: sed quota sit hæc massa, nondum habes, nisi scripsero, cuius numeri sit massa. Quod si assignauero *O.a*, numeri *t* massam esse; neque sic habes, quota sit, nisi simul assignauero, quotus est numerus, valor litteræ *t*. Neque si assignauero *O.a*, eius numeri massam esse, cuius *t2* est secunda potestas: neque si *O.a*, massam eius numeri dixero, cuius *t3* est tertia potestas; nisi aut litteræ *t*, aut characteris *t2*, vel *t3*, quotus valor sit, certò certiùs assignauero. Similiter cum scripsero *O.r*, habes massam ex omnibus residuis: sed quantitatem eius non habes. Cum verò licentiam dedero, vt quotum quemque litteræ *t* valorem taxes; tuque huiusmodi vsus licentia dixeris, *t* valere quinario: statim profectò assignabis & *O.a*, valere 10; & *t2*, valere 25; & *t3*, valere 125; & *O.r*, valere 10; & determinatæ litteræ *t*, determinatas esse quantitates *O.a*, *O.r*, *t2*, *t3*. Quare data licentia antequam vsus fueris, habebas profectò *O.a*, *O.r*, *t2*, *t3*, quantitates indeterminatas determinabiles.

Rursum cum scripsero duas eiusdem numeri Massas *O.a*, & *O.r*, esse æquales; aut massam *O.a*, ad *t2*—*t* dimidiã esse; neque tamen assignauero, quotus litteræ *t* sit va-

 lor;

lor; dederimque assignandi licentiam: antequam vtaris licentia, profectò habes determinatam esse rationem dimidiam, indeterminatæ quantitatis *O.a*, ad indeterminatam quantitatem *t2---t*. Quæ quidem theoremata interim mihi credis ante demonstrationem, ex inductione exemplorum; atque ita ex determinatione: sed cum in secundo elemento demõstrauero; tunc citra omnem inductionem, & ante determinationem valoris litteræ *t*, indubitanter vtraque asseuerabis. Habes ergo inter indeterminatas quantitates, determinatas rationes.

Sed si quæsiero, quænam sit ratio Massæ *O.a*, cuiuspiam numeri *t*, ad *t2*; aut Massæ *O.2a*, ad *t2*; aut Massæ *O.a*, ad *t*; aut massæ *O.a*, ad *t3*: ad has profectò interrogationes, data licentia vsus, cum taxaueris litteræ *t* valorem, tunc determinatam assignabis rationem; sed non eamdem semper, ad eamdem quæstionem. Siquidem litteram *t*, taxaueris valere 3; pro ratione *O.a*, ad *t2*, respondebis, 3 ad 9: qui si taxaueris litteram *t* valere 4; ad eamdem quæstionem respondebis 6 ad 16: quæ non est eadem ratio 3 ad 9. item pro alijs valoribus, aliam respondebis rationem. Itaque data licentia taxandi litteram *t*, antequam taxaueris, habes rationem *O.a* ad *t2* indeterminatam determinabilem.

Interim notandum est, possibiles responsiones ad quæstionem propositam, pro varijs litteræ *t* valoribus, ordinatim semper maioribus; varias, & semper ordinatim maiores esse: dimidia quidem ratione semper minores; ad

ipsam

ipſam verò dimidiam ſemper propiùs accedentes.

Pro litteræ *t* valore	*O.a*	ad *t2*
2	1	4
3	3	9
4	6	16
5	10	25
6	15	36
7	21	49
8	28	64
9	36	81
10	45	100

Quod ſi propoſitæ quæſtioni potuerit, pro quodam valore aſſignabili reſponderi ratio propior dimidiæ, quàm alia quælibet; dicetur ipſa indeterminata ratio *O.a* ad *t2*, quaſi dimidia.

Similiter *O.2a* ad *t2*, ratio eſt indeterminata determinabilis. nam

Pro litteræ *t* valore	*O.2a*	ad *t2*
2	2	4
3	6	9
4	12	16
5	20	25
6	30	36
7	42	49

Pro litteræ *t* valore	*O.2a*	ad *t2*
8	56	64
9	72	81
10	90	100

atque ita semper minoris inæqualitatis est ratio: sed eò semper maior, quò pro maiore litteræ *t* valore, assignatur. Quæ ratio indeterminata determinabilis; si fuerit assignabilis propior æqualitati, quàm data quælibet inæqualitas; dicetur ratio *O.2a* ad *t2*, quasi æqualitas.

Item pro litteræ *t* valore	*O.a*	ad *t*
2	1	2
3	3	3
4	6	4
5	10	5
6	15	6
7	21	7
8	28	8
9	36	9
10	45	10

est ratio indeterminata determinabilis, pro maiore litteræ *t* valore, semper maior, quæ si fuerit assignabilis maior, quàm data quælibet; dicetur ratio *O.a* ad *t*, quasi infinita.

De-

Denique pro litteræ *t* valore	*O.a* ad *t3*
2	1 8
3	3 27
4	6 64
5	10 125
6	15 216
7	21 343
8	28 512
9	36 729
10	45 1000

eſt indeterminata determinabilis, pro maiore litteræ *t* valore, ſemper minor; quæ ſi fuerit aſſignabilis minor, quàm data quælibet; dicetur ratio *O.a* ad *t3*, quaſi nulla.

Cap. 4.

Quartum, pro quarto elemento, eſt animaduerſio *def.* 10. *lib.* 5. *Elem. Eucl.* & *def.* 5. *lib.* 6. in quibus modus quantitatis rationum aſſumitur; illi quidem ſuperinductus, ſecundum quæm maiores, vel minores rationes dicuntur, *def.* 8. *lib.* 5. ſed ab illo longè alius; & ſecundum quem propiores æqualitati, aut remotiores ab æqualitate rationes dicimus.

Modum autem quantitatis, in vnoquoque genere, concipimus ex duobus. vno: ſecundum quod res eiuſdem generis inuicem ſunt componibiles, vt faciant eiuſdem ge-

neris

neris aliam rem, in eiusdem modi comparatione grandiorem . altero; secundum quod res eadem, secum ipsa altera, composita aliquoties, facit rem eiusdem generis, in eiusdem modi comparatione, æquètoties grandiorem. Sic calor calori adpositus, facit calidum calidius: & calor simul aliquoties iteratus, facit æquèmultoties calidius calidium. item lumen lumini adpositum, facit luminosius luminosum: idemque lumen simul aliquoties iteratum, facit æquemultoties luminosius luminosum.

Similiter ratio inæqualitatis maioris, alij maioris inæqualitatis rationi adposita, componit rationem maioris inæqualitatis, & magis maioris inęqualitatis, ideſt magis ab æqualitate remotæ, *ex def.* 5.6. Et ratio maioris inæqualitatis, secum ipsa altera, aliquoties composita, facit rationem multò maioris inæqualitatis æquemultiplicatam, ideſt æquemultò remotiorem ab æqualitate, *ex def.* 10.5. Quare maioris inæqualitatis rationibus, conuenit modus quantitatis secundum quem magis vel minùs maioris sunt inæqualitatis, ideſt, magis, vel minùs ab æqualitate distantes.

Eodemque modo, ratio minoris inæqualitatis, alij minoris inæqualitatis rationi adposita facit rationem minoris inæqualitatis, & magis minoris inæqualitatis, ideſt remotioris ab æqualitate *ex def.* 5.6. Et ratio minoris inæqualitatis, secum ipsa altera, aliquoties composita, facit rationem multò minoris inæqualitatis ęquemultiplicatam, ideſt æquemultò remotioris ab æqualitate, *ex def.* 10.5.

Quare

Quare minoris inæqualitatis rationibus, conuenit modus quantitatis, secundum quem magis, vel minùs minoris sunt inæqualitatis, ideſt ſecundum quem magis, vel minùs ab æqualitate diſtant.

Porrò quantum ad hunc modum attinet quantitatis, notandum eſt, rationum quaſi tria genera eſſe. Primum æqualitatis; cui talis modus non conuenit, neque ſeorſim ipſi, neque ſibi & alijs, tamquam vnius generis rationibus: nam æqualitas æqualitati adpoſita, eamdem componit æqualitatem; & maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis rationi adpoſita, eamdem inæqualitatis facit rationem. Secundum, maioris inæqualitatis. Tertium, minoris inæqualitatis; quibus tales modos conuenire ſingulis demonſtrauimus: ſed non vtriſque, vt vni generi. nam maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis rationes adpoſitæ, nec magis maioris, nec magis minoris inæqualitatis componunt rationes.

Cap. 5.

Quintum pro quinto elemento eſt inquiſitio quantitatis quæ cuiuſque rationis non ex hypotheſi eſt propria, ſed naturaliter, & citra omnem hypotheſim: altioris rationis, maior; depreſſioris, minor; æquealtæ, eadem; multiplicatæ, æquemultiplex; & ſubmultiplicatæ, æqueſubmultiplex: quam logarithmnm vocamus; & nos in quinto elemento, diligenter; quantùm potuimus, perſecuti, non hucuſque quidem attigimus, tamen viam inueniendi aperuimus. Id quod primùm in ratione dupla, ita conabor explicare.

Accipe

Accipe seriem infinitam omnium fractionum, in quibus vnitas, & omnes numeri denominant vnitatem: quarum in characteribus, cum consueuerit numerator, scribi supra denominatorem interueniente lineola, sic

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{16}$ &c.

nos aliter. scripsimus enim primùm numeratorem, deinde statim adscripsimus denominatorem inter parentheses clausum: quod compositioni typographycæ longè commodius cum sit, lectioni etiam tum in latino sermone, tum in nostro Italico idiomate, magis conuenit.

1(1), 1(2), 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), 1(7), 1(8), 1(9), 1(10), 1(11), 1(12), 1(13), 1(14), 1(15), 1(16), &c.

Et in accepta serie sume terminos, duplam habentes rationem, simplos, dimidios, subtriplos, subquadruplos, aliosque submultiplos deinceps. Et inter extremos, accipe in eadem serie medios quosque, quorum & maioris extremi summa dicetur hyperlogarithmus, eo quod superet logarithmum; eorumdem verò mediorum, & minoris extremi summa, dicetur hypologarithmus; eo quod superetur à logarithmo.

Itaque duplæ rationis hyperlogarithmi sunt, qui sequuntur: primus inter simplos & maximos; & reliqui deinceps ordinatim inter minores, & submultiplos.

1(1).

l(1).
l(2) l(3).
l(3) l(4) l(5).
l(4) l(5) l(6) l(7).
l(5) l(6) l(7) l(8) l(9).

& reliqui in infinitum: quorum inter ſimplo hyperlogarithmus eſt maximus, & reliqui deinceps ordinatim minores.

Item duplæ rationis hypologarithmi ſunt qui ſequuntur primus inter ſimplos, & maximos, & deinceps reliqui

l(2).
l(3) l(4).
l(4) l(5) l(6).
l(5) l(6) l(7) l(8).
l(6) l(7) l(8) l(9) l(10).

& in infinitum: quorum inter ſimplos hypologarithmus eſt minimus, & reliqui deinceps ordinatim ſunt maiores.

Eſt autem aſſignatorum quotcunque minimus hyperlogarithmorum, maior quàm maximus hypologarithmorum: & differentia æqualis minimo aſſumptorum extremorum rationis dúplæ. cum autem poſſit aſſumi minor extremus, quàm data quælibet quantitas; poſſunt conſequenter aſſumi termini duplam inter ſe rationem habentes, quorum hyperlogarithmi, & hypologarithmi differentia minor, quam data quælibet quantitas. vnde hyperlogarithmus, & hypologarithmus, quaſi ſunt æquales.

Porrò logarithmus illa eſt quantitas, ad quam tendunt

hyper-

hyperlogarithmi, cum ſemper deinceps minuuntur, & ad quam tendunt hypologarithmi, cum ſemper deinceps augentur; omni minor hyperlogarithmo, & omni maior hypologarithmo.

Similiter, ſeſquialteræ rationis hyperlogarithmi & hypologarithmi ſunt, qui ſequuntur: & vtrorumque primus eſt inter ſimplos, & maximos; reliqui verò deinceps ordinatim inter minores, & ſubmultiplos.

Hyperlogarithmi.

1(2).
1(4) 1(5).
1(6) 1(7) 1(8).
1(8) 1(9) 1(10) 1(11).
1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14).
& deinceps alij in infinitum.

Hypologarithmi.

1(3).
1(5) 1(6).
1(7) 1(8) 1(9).
1(9) 1(10) 1(11) 1(12).
1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15).
& reliqui deinceps in infinitum.

Similiter alius cuiuſque rationis hyperlogarithmi, & hypologarithmi ſunt aſſignabiles, quorum omnium quantitas intermedia eiuſdem rationis eſt logarithmus. Et hæc eſt ſuæ cuiuſque rationis quantitas naturalis, & earumdem, vel æquealtarum rationum eadem quantitas, ſecundum altitu-

altitudinis & depressionis modum in præcedenti capite fusiùs declaratum.

Deinde altiorum rationum sunt maiores logarithmi, & depressiorum minores. quod ideò patet, quia altioris hyperlogarithmi rationis, hyperlogarithmos continent depressioris: & hypologarithmi continent hypologarithmos.

Nam exempli gratia hyperlogarithmi sunt rationum

triplæ	& sesquialteræ
1(1) 1(2).	1(2).
1(2) 1(3) 1(4) 1(5).	1(4) 1(5).
1(3) 1(4) 1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(6) 1(7) 1(8).

quorum triplæ altioris hyperlogarithmi continent sesquialteræ depressioris hyperlogarithmos.

Item hypologarithmi sunt earumdem rationum

triplæ	& sesquialteræ
1(2) 1(3).	1(3).
1(3) 1(4) 1(5) 1(6).	1(5) 1(6).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7) 1(8) 1(9).	1(7) 1(8) 1(9).

quorum hypologarithmi triplæ continent hypologarithmos sesquialteræ.

Vnde patet etiam, quod compositæ rationis logarithmus, est aggregatus componentium logarithmorum: nam & hyperlogarithmi duplæ, & sesquialteræ, hyperlogarithmos triplæ componunt; & hypologarithmi, hypologarithmos.

Hyperlogarithmi.

Duplæ	Sesquialteræ.
1(1).	1(2).
1(2) 1(3).	1(4) 1(5).
1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7).	1(8) 1(9) 1(10) 1(11).

Hypologarithmi.

Duplæ.	Sesquialteræ.
1(2).	1(3).
1(3) 1(4).	1(5) 1(6).
1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(9) 1(10) 1(11) 1(12).

Sed & duplicatæ rationis duplus est logarithmus: nam duplicatæ duplæ rationis, nempe quadruplæ hyperlogarithmi ex binis duplæ rationis hyperlogarithmis aggregatis fiunt.

Hyperlogarithmi quadruplæ

ex duplæ,	& duplæ hyperlogarithmis.
1(1).	1(2) 1(3).
1(2) 1(3).	1(4) 1(5) 1(6) 1(7).
1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11).

Hypologarithmi quadruplæ

ex duplæ,	& duplæ hypologarithmis.
1(2).	1(3) 1(4).
1(3) 1(4).	1(5) 1(6) 1(7) 1(8).
1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12).

Si-

Similiter multiplicatæ cuiusque rationis æquemultiplex deprehenditur logarithmus; quia quasi æquemultipli sunt hyperlogarithmi, & quasi æquemultipli sunt hypologarithmi. Et è conuerso submultiplicatæ deprehenditur submultiplex logarithmus.

APPENDIX.

CVm hæc scriberem, mihi contigit rectum tramitem inuenire, ad persequendos omnium numerosarum rationum logarithmos. Oportet autem eiusdem ab initio propositæ seriei fractionum terminos assumere, aliquotenos à primo, singulos, binos, ternos, quaternos, quinos, & deinceps. Porrò ex totenis collectas quantitates voco prologarithmos, & totenorum seriem, voco seriem prologarithmorum.

Esto autem series singulorum *A*: series prologarithmorum ex binis *B*: series prologarithmorum ex ternis *C*: item ex quaternis *D*: item ex quinis *E*: & deinceps aliæ. Deinde series ordinetur excessuum, primi prologarithmi seriei *B*, supra primum seriei *A*; & secundi, supra secundum; & tertij, supra tertium; & sic deinceps in infinitum: omnium huiusmodi excessuum summa, est logarithmus rationis duplæ. Nam primus excessus, est hypologarithmus inter maximos terminos rationis duplæ: summa ex primo & secundo, est hypologarithmus, inter subduplos maximorum: summa ex primo secundo & tertio, est hy-

E	1(1) 1(2) 1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10).	1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15).
D	1(1) 1(2) 1(3) 1(4).	1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(9) 1(10) 1(11) 1(12).
C	1(1) 1(2) 1(3).	1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9).
B	1(1) 1(2).	1(3) 1(4).	1(5) 1(6).
A.	1(1).	1(2).	1(3).

pologarithmus, iuter ſubtriplos maximorum. Ergo ſumma omnium, hypologarithmorum eſt max mus, nempe logarithmus.

Item ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *C*; ſupra primum ſeriei *B*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium huiuſmodi exceſſuum ſumma, eſt logarithmus rationis ſeſquialteræ.

Item ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *D*, ſupra primum ſeriei *C*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium ſumma exceſſuum, eſt logarithmus rationis ſeſquitertiæ.

Similiter ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *E*, ſupra primum ſeriei *C*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium ſumma exceſſuum, eſt logarithmus rationis quam habent numeri ex quotenis eſt ſeries *E*, & ex quotenis eſt ſeries *C*. Nam primus exceſſus, inter maximos eiuſdem rationis terminos eſt hypologari-

garithmus:primi vero & secundi excessuum summa,est hypologarithmus inter subduplos maximorum: primi secundi & tertij summa excessuum, est hypologarithmus inter subtriplos; & sic deinceps.

Cap. 6.

Sextum & vltimum, pro sexto est elemento: numerosa duarum propositionum quinti elementi reductio, quarum est vsus insignis in sexto.

Prima, quæ est 99. 5.

Quatuor hormonicè dispositarum quantitatum, si prima maxima est omnium, logarithmus, rationis primæ ad secundam, ad logarithmum rationis tertię ad quartam, minor est, quàm vt prima ad tertiam; maior, quàm vt secúnda ad quartam.

Sint quantitates numerosas inuicem rationes habentes, harmonicè dispositæ 1(4) 1(5) 1(8) 1(9) quarum maxima 1 4).

Dico logarithmum rationis 1(4) ad 1(5) ad logarithmum rationis 1(8) ad 1(9), minorem esse, quàm vt 1(4) ad 1(8); maiorem verò, quàm vt 1(5) ad 1 9). idest

Dico logarithmum rationis 5 ad 4 ad logarithmum rationis 9 ad 8, minorem esse, quàm vt 8 ad 4; maiorem verò, quàm vt 9 ad 5. idest

Dico rationem 5 ad 4, ad rationem 9 ad 8, logarithmicè minorem esse, quàm vt 8 ad 4; maiorem verò logarithmicè, quàm vt 9 ad 5. idest

Dico rationem 5 ad 4 quadruplicatam, depressiorem esse

esse ratione 9 ad 8 octuplicata: & 5 ad 4 quintuplicatam altiorem esse ratione 9 ad 8 nonuplicata.

Et quia ambæ rationes 5 ad 4, & 9 ad 8, sunt maioris inæqualitatis: inter quas depressiores altioribus sunt minores. Dico 5 ad 4 quadruplicatam minorem esse ratione 9 ad 8 octuplicata: & 5 ad 4 quintuplicatam, maiorem esse ratione 9 ad 8 nonuplicata. idest

Dico potestates quartam 5 ad quartam 4, minorem esse quam vt octaua 9 ad octauam 8: quintam verò 5 ad quintam 4, maiorem quam vt nona 9 ad nonam 8. idest

Dico productos sub potestatibus, sub quarta 5, & octaua 8, minorem, quàm sub quarta 4, & octaua 9: sed sub quinta 5, & nona 8, maiorem, quàm sub quinta 4, & nona 9.

Potestates.

Quarta	5	625
Octaua	8	16777216
		83886080
		33554432
		100663296
		10485659900

Quar-

Quarta	4	256
Octaua	9	43046721
		258280326
		215233605
		86093442
		11019960576
Quinta	5	3125
Nona	8	134217728
		671088640
		268435456
		134217728
		402653184
		419430400000
Quinta	4	1024
Nona	9	387420489
		1549681956
		774840978
		387420489
		396718580736

Secunda, quæ est 100. 5.

Quatuor arithmeticè dispositorum numerorum, ratio primi ad secundum totuplicata, quotus est primus, maior est ratione tertij ad quartum totuplicata, quotus est quartus: ratio verò primi ad secundum totuplicata, quotus est secundus, minor est, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus est tertius.

Sint quatuor arithmeticè dispositi numeri 8, 5, 7, 4.

Dico rationem 8 ad 5 octuplicatam, maiorem esse ratione 7 ad 4 quadruplicata: & rationem 8 ad 5 quintuplicatam, minorem septuplicata 7 ad 4. idest

Dico potestates octauam 8 ad octauam 5, maiorem esse, quàm quarta 7 ad quartam 4: quintam 8 ad quintam 5, minorem, quàm septima 7 ad septimam 4. idest

Dico productos sub potestatibus, sub octaua 8, & quarta 4, maiorem esse, quàm sub octaua 5, & quarta 7: & sub quinta 8, & septima 4, minorem, quàm sub quinta 5, & septima 7.

		Potestates.
Octaua	8	16777216
Quarta	4	256
		100663296
		83886080
		33554432
		4294967296

Octaua	5	390625
Quarta	7	2401
		390625
		1562500
		781250
		937890625
Quinta	8	32768
Septima	4	16384
		131072
		262144
		98304
		196608
		32768
		536870912

Poteſtates.

Quinta	5	3125
Septima	7	823543
		4117715
		1647086
		823543
		2470629
		2573571875.

			Errata.	*Corrige.*
In Præfatione præcedenti.				
Pag.	*lin.*	*col.*		
52	7	1	164025	273375
	8	1	9216	27648
	9	1	49	343

In Opere ſequenti.

Pag.	*lin.*		
5	20	baſibus, quæ	baſibus, quælibet quantitas fuerit ſumma duarum, quæ
64	25	quoties	quotus
	26	quoties	quotus
207	27	ſupra lineolam	ante parentheſes
208	3	infra lineolam	inter parentheſes.



SOLI DEO GLORIA.

GEOMETRIÆ
SPECIOSÆ
ELEMENTA.

Petrus Mengolus, Lucæ Tesino, adolescenti optimo S. D.



N prima lectione Algebræ Speciosæ, tres tabulas triangulares tibi tradidi, multiplicium, & proportionalium, & nominum nuncupatas: earumque usum, ad componendas, & relinquendas potestates binomiorum, & per modum artis, explicaui. Eius demonstrationem, præsenti tradо libello; quam ex me audisti: vt legendo recolas; & ad potiora mathemata suscipienda, te prepares. Nihil alienum sumo; præter quædam, ex Euclide, in quinto, & sexto: quæ suis locis allego, in margine. Vale.

GEO-

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM PRIMVM

DEFINITIONES.

1 SI tabula triangularis, ex vertice, & basibus, & lateribus, ita concipiatur ordinata; vt in vertice sit quædam quantitas; & in prima basi, statim sub vertice, sint duæ quantitates; & in secunda basi, tres; & in tertia, quatuor; & sic deinceps: in singulis basibus, dicentur, quantitates extremæ, Prima, & Vltima; & his proximæ, Secunda, & Penultima; item Tertia, & Triultima; Quarta, & Quartultima; & deinceps.

2. Vnde latus primarum omnium quantitatum, dicetur, Primum; & secundarum, Secundum; & deinceps: vltimarum quoque dicetur, Vltimum; & penultimarum, Penultimum; & sic deinceps.

3. In singulis quoque lateribus, quantitas, quæ in vertice, aut quæ vertici est proxima, dicetur Prima; & reliquæ

deinceps, Secunda, Tertia, Quarta, & sic in infinitum.

4. Quantitas, vnde progressio continuè proportionalium, ordinatur in infinitum, dicetur, Rationalis. & significabitur, charactere *u*.

5. Et prima consequens à rationali, dicetur, Radix, vel Potestas prima. & significabitur, charactere cuiusq; litteræ alphabeti.

6. Et reliquæ consequentes, dicentur Potestates radicis, Secunda, Tertia, & deinceps, iuxta suum cuiusque ordinem. Et significabitur vnaquæque, eâdem litterâ suæ radicis, adscriptoque ordinis numero. vt radicis *a*, secunda potestas *a2*, tertia *a3*, & sic deinceps.

7. Rationalis, licet nomen ordinis non habeat inter potestates; tamen habebitur pro ordinata: & dicetur, vnitate minùs ordinata, quàm sit prima potestas.

8. Si tabulæ triangularis in vertice, fuerit rationalis; & in prima basi, duæ fuerint radices, prior, in primo latere, & posterior, in vltimo; & deinceps in primo latere, fuerint ordinatæ potestates prioris radicis, & in vltimo, potestates posterioris: fuerint autem, & in reliquis lateribus secundo, tertio, & deinceps in singulis, ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione primi lateris; item in penultimo, trilultimo, & reliquis deinceps lateribus, in singulis, ordinatæ fuerint continuè proportionales, in eadem ratione vltimi lateris: & in singulis basibus, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione radicum; in secunda basi, tres, quarum extremæ sunt secundæ potestates

ſtates radicum; in tertia, quatuor, quarum extremæ ſunt poteſtates tertiæ, & ſic deinceps: dicetur Tabula Proportionalium. *Huiuſmodi tabulam ordinat Euclides in 2. 8. Elementorum.*

9. In tabula proportionalium, inter extremas, vna quęlibet media, ad quam rationalis habuerit rationem compoſitam ex duabus rationibus, ad quaſdã poteſtátes vtrarumque radicum; denominabitur ab vtriſque ordinibus poteſtatum, à priore primùm, deinde à poſteriore. & ſignificabitur, ex vtriſq; characteribus, charactere compoſito; ex priore primùm, deinde ex poſteriore. Vt ſi prior eſt radix *a*, poſterior *r*; media, ad quam *u*, rationem habet compoſitam, ex rationibus, *u* ad *a*, & *u* ad *r*, dicetur, Vniprima; & ſignificabitur, charactere *ar*: ad quam verò *u*, rationem habet compoſitam ex rationibus, *u* ad *a2*, & *u* ad *r3*, dicetur, Bitertia; & ſignificabitur charactere *a2r3*: & ſic deinceps.

10. Si tabulæ triangularis in vertice, fuerit vnitas; & in prima baſi, & in lateribus primo, & vltimo, fuerint vnitates; deinceps verò in baſibus, quæ verſus verticem ſibi inſiſtũt, quaſi fronti cornua, dicetur, Tabula multiplicium.

11. Si duæ tabulæ, multiplicium, & proportionalium, ita coaptentur, vertex, vertici, & latera, lateribus, & baſes, baſibus, vt congruant; ideſt, vt quiſque numerus multiplex, congruentem multiplicet proportionalem: producta, dicetur, Tabula Nominum. Significabitur autem vnumquodq; nomen, eodem ſuæ proportionalis chara-

ctere,

ctere, poſt ſuum immediatè numerum conſcripto.

12. In quibuſque proportionalitatibus earumdem, vel non earumdem rationum; homologæ ſunt primùm, antecedentes, antecedentibus, & conſequentes, conſequentibus: deinde permutando, antecedentes ſuis conſequentibus ſunt homologæ: homologarum quoque æquemultiplices, & eædem partes, & ſummæ, & differentiæ, ſunt homologæ.

13. Homologia, eſt ſumptio homologarum, vt & in alia quadam proportionalitate, fiant homologæ.

14. Ratio ex æquali, dicetur, quælibet ratio, ex rationibus compoſita.



Ta-

Tabula Proportionalium.

u

a r

a2 ar r2

a3 a2r ar2 r3

a4 a3r a2r2 ar3 r4

a5 a4r a3r2 a2r3 ar4 r5

a6 a5r a4r2 a3r3 a2r4 ar5 r6

Tabula Multiplicium.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Tabula Nominum.

u

a r

a2 2ar r2

a3 3a2r 3ar2 r3

a4 4a3r 6a2r2 4ar3 r4

a5 5a4r 10a3r2 10a2r3 5ar4 r5

a6 6a5r 15a4r2 20a3r3 15a2r4 6ar5 r6

Explicationes quarumdam notarum.

Additio ſignificabitur, charactere crucis: vt ex a, & r, collecta ſumma, $a + r$.

Subtractio, charactere lineolæ: vt ex t, dempta a, relinquit differentiam, $t - a$.

Æqualitas, ea interpunctione ſignificabitur, qua partes principes periodi ſolent diſtingui. vt quod $a + r$, eſt æqualis ipſi t,

$$a + r : t.$$

Ratio ſignificabitur interpunctione, qua maximæ partes periodi ſubdiſtinguuntur; ſcilicet puncto, & commate. vt ratio a ad r, ſcribendo,

$$a ; r.$$

Itaque proportio a ad r; ſicut $a2$ ad ar, ſignificabitur, ſcribendo,

$$a ; r : a2 ; ar.$$

Et compoſita ratio ex rationibus. velut ex u ad $a2$, & u ad $r3$, compoſita u ad $a2r3$, ſcribendo,

$$u ; a2 , + u ; r3 : u ; a2r3.$$

vbi comma, inter $a2$, & crucem, vtiliter diſtinguit, ad ſignificandum, non quantitatum $a2$, & u, ſummam $a2 + u$, ſed rationum.

Multiplicata quoque ratio, ſignificabitur. velut $a3$ ad $r3$, triplicata rationis a ad r, ſcribendo,

$$a3 ; r3 : \text{triplicata } a ; r.$$

Theo-

Theorema primum, Propositio prima.

EX ijsdem rationibus, ex æquali, sunt eædem rationes.

Hypothesis.

$a; b: c; d.$

$e; f: g; h.$

Dico ex æquali $a; b, + e; f: c; d, + g; h.$

Præparatio.

$e; f: b; i.$

$g; h: d; l.$

Demonstratio.

11.5. | $b; i: d; l$
22.5. | $a; i: c; l$
def.5.6. | $a; b, + e; f: a; i.$
def.5.6. | $c; d, + g; h: c; l.$
11.5. | $a; b, + e; f: c; d, + g; h.$ Quod erat demonstrandum.

Quare ex ijsdem rationibus, ex æquali, sunt eædem rationes.

Theor. 2. Prop. 2.

QVantitates proportionales, per homologiam sunt proportionales.

Demonstr.

def. 6.5. 12,& 24.5. 15.5 16.5 17.5 18.5 | Nam conuertendo, quantitates fiunt proportionales: item homologas homologis addendo: item æque multiplicando, & æquepartiendo: & permutando: & diuidendo: & com-

B po-

19.5 ponendo: & homologas ab homologis aufe-
22.5 rendo; & per conuersionẽ rationis: & ex æquali in proportione ordinata: coniunctisq; omnifariam huiusmodi argumentis, quocunque ordine, per homologiam, proportionales fiunt. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

POtestates æqueordinatæ totuplicatam habent rationem radicum, quotus est ordo.

Hypoth.

Sint radices, *a*, *r*: quarum potestates æqueordinatæ, *a3*, *r3*: numerus ordinis, 3.

Dico *a3*; *r3*: triplicatam *a*; *r*.

Demonstrat.

def. 6. | *a3*; *u*: triplicata *a*; *u*.
def. 6. | *u*; *r3*: triplicata *u*; *r*.
p. h. | *a3*; *r3*: triplicata *a*; *r*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop.

SI tabulæ triangularis in vertice fuerit rationalis; & in prima basi, fuerint duæ radices; & in primo, & vltimo latere, fuerint continuè proportionales; & in singulis basibus, ordinatæ fuerint continuè proportionales: erit proportionalium tabula.

De-

Demonstr.

Cum enim in prima basi sint radices : erunt in
def. 6. secunda basi extremæ, secundæ potestates; dupli-
3. h. catam habentes rationem radicum : quę & dupli-
def. p. catam habent rationem deinceps : ergo ratio ra-
11. 5. dicum eadem est, quæ deinceps. Eodemque modo, in singulis basibus, ostendetur, quod ratio radicum eadem est, quæ deinceps. Quare vt in prima basi, ita in secunda, & reliquis, eadem semper est ratio primę quantitatis ad secundam, & secundæ ad tertiã,& sic deinceps;item penultimæ ad vltimam,& tritultimæ ad penultimã,& sic deinceps. Itaque in binis deinceps lateribus,& in binis deinceps basibus,quantitates eamdem habent rationẽ radicum, antecedentes,in vno,& consequentes,in
16. 5. altero latere : ergo permutando, eamdem habent rationẽ, antecedentes, in vna, & consequentes, in altera basi:& vt in primo latere sunt continuè proportionales, vt rationalis ad priorem radicem; ita in secundo, & in tertio, & in reliquis deinceps, in eadem sunt ratione continuè proportionales : & vt in vltimo, sunt continuè proportionales,vt rationalis ad posteriorem radicem;ita in penultimo,
def. 8. & tritultimo, & in reliquis deinceps.Quare tabula triangularis, est tabula proportionaliũ.Quod &c.

Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

SI tabulæ triangularis in vertice, fuerit rationalis; & in prima basi, fuerint duæ radices; & in primo, & vltimo latere, fuerint continuè proportionales; & in singulis lateribus à primo, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione, quæ deinceps, in primo: erit proportionalium tabula. Item si in singulis lateribus ab vltimo, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione, quæ deinceps, in vltimo: erit proportionalium tabula.

Demonstr.

Cum in binis deinceps basibus, & in binis deinceps lateribus à primo, quantitates eandem habeant rationem, quæ deinceps, in primo, antece-
16. 5. dentes, in vna, & consequentes, in altera basi: habebunt, permutando, eamdem rationem etiam, antecedentes, in vno, & consequentes, in altero latere: eritque in basibus, ratio deinceps, eadem, quæ in prima basi: eruntque in singulis basibus, continuè proportionales in eadem ratione radi-
4. b. cum: quare tabula triangularis, erit proportionalium tabula. Quod &c.

Simili prorsus demonstratione, ostendetur altera pars Theorematis. Quam &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 6. Prop. 6.

IN tabula proportionalium, rationalis ad vnamquamq; mediam, habet rationem cōpositam ex rationibus, ad potestatem, in primo latere, vnitate minùs ordinatam, quàm sit ipsa media, in basi, ab vltima; & ad potestatem, in vltimo latere, vnitate minùs ordinatam, quàm sit ipsa media, in basi, à prima.

Hypoth. & Demonst.

Sit in tabula proportionalium, quinta basis; in
def. p. qua, sex proportionales: & sit vna ex medijs, non prima, quæ est sextultima, nec sexta, quæ est vltima, sed quarta, quæ est tritultima. Et sint, in primo latere, radix a; & in vltimo, radix r: & ab a, sit secunda potestas $a2$, vnitate minùs ordinata,
def. 8. quàm tritultima; quæ profectò in primo latere, est
def. 3. tertia; & in tritultimo, est prima: sit etiam ab r, tertia potestas $r3$, vnitate minùs ordinata, quàm
def. 8. quarta; quæ profectò, in vltimo latere, est quar-
def. 3. ta; & in quarto, prima: erit quantitas $a2r3$,
def. 9. bitertia, ad quam, rationalis habet rationem compositam ex rationibus, ad potestates $a2$, & $r3$.

Dico mediam, in quinta basi, quartam tritultimam, esse bitertiam $a2r3$.

Demonstr.

def. 2. Nam quarta, & tritultima, in quarto est, & in tritultimo latere: in quarto quidem, est tertia quantitas; & in tritultimo, est quarta. Habet ergo

go rationalis ad tertiam quarti lateris, rationem compositam ex rationibus, ad *r3* primam quarti lateris, & primæ quarti lateris ad tertiam: sed prima quarti lateris ad secundam, & secunda ad tertiam, sunt continuè proportionales, vt prima primi lateris ad secundam, & secunda ad tertiam: ideoque prima ad tertiam quarti lateris, est vt prima *u*, ad tertiam primi *a2*: ergo rationalis ad tertiam quarti lateris, ideſt, ad quartam tritultimam, in quinta basi, rationem habet compositam ex rationibus, *u* ad *r3*, & *u* ad *a2*; eamdem, quam habet ad *a2r3* bitertiam. Ergo in quinta basi, quarta tritultima, est bitertia *a2r3*. Quod &c.

def. 8. *p. h.* *p. h.* 9. 5.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

QVantitas, ad quam rationalis habet rationem compositam, ex rationibus ad potestates, in primo, & vltimo latere tabulæ proportionalium; est media: & est in basi æqueordinata, atque summa est ordinum potestatum: & est vnitate plus ordinata, in basi, ab vltima, quàm sit ordo potestatis, in primo latere: item est vnitate plus ordinata, in basi, à prima, quàm sit ordo potestatis, in vltimo latere.

Hypoth.

Sit quantitas *a2r3*, ad quam *u*, rationem habet compositam, ex rationibus, *u* ad *a2*, in primo latere, & *u* ad

ad $r3$, in vltimo, tabulæ proportionalium: quarum poteſtatum ſumma ordinum, ſit ordo quintæ baſis: & quarum poteſtatum, vnitate maiores ordines, eius quidem $a2$, quæ in primo eſt latere, ſit ordo tritultimæ, & eius $r3$, quæ in vltimo eſt latere, ſit ordo quartæ, in baſi.

Dico $a2r3$, eſſe quartam tritultimam, in quinta baſi.

Demonſtr.

Eſt enim $a2$, tertia in primo latere; & vt u ad $a2$, ita eſt, in quarto latere, prima ad tertiam:
def. 8. ſed eſt $r3$, prima in quarto latere: ergo u ad ter-
p. b.
def. 8. tiam in quarto latere, rationem habet compoſitam, ex rationibus, ad $a2$, & ad $r3$; eamdem,
9. 5. quam ad $a2r3$. Ergo $a2r3$, eſt tertia in quar-
def. 3.
def. 2. to latere: ergo eſt quarta in tritultimo: ergo in
def. p. ſua baſi, eſt quarta tritultima: ſed quarta tritultima non eſt, niſi inter ſex proportionales, quarum & ſexta eſt vltima, & quinta eſt penultima, & ſic
def. 9. deinceps: & ſex proportionales, non niſi in quinta ſunt baſi. Ergo $a2r3$ bitertia, eſt & quarta tritultima, in quinta baſi. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 8. *Prop.* 8.

SVmma cuiuſque baſis nominum in tabula, eſt poteſtas æqueordinata ſummæ radicum.

Hy-

Hypoth.

Sit in tabula nominum basis tertia, cuius summa nominum $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$: sit quoque summa radicum $a + r$.

Dico $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$, esse tertiam potestatem $a + r$.

Oportet autem priùs demonstrare, de summa nominũ, præcedentium basium, videlicet, secundæ basis.

Dico itaque primò $a2 + 2ar + r2$, secundam esse potestatem $a + r$.

Demonstr.

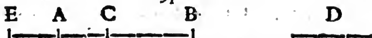
def. 8.	$u; a : a; a2 : r; ar : a + r; a2 + ar$.
& 2. *h.*	$u; r : a; ar : r; r2 : a + r; ar + r2$.
2. *h.*	$u; a + r : a + r; a2 + 2ar + r2$.
	$a2 + 2ar + r2$, est secunda potestas $a + r$. Quod &c.
def. 8. & 2. *h.*	$u; a : a2; a3 : ar; a2r : r2; ar2 : a2 + 2ar + r2; a3 + 2a2r + ar2$.
	$u; r : a2; a2r : ar; ar2 : r2; r3 : a2 + 2ar + r2; a2r + 2ar2 + r3$.
2. *h.*	$u; a + r : a2 + 2ar + r2; a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$.
ef. 6.	$a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$, est tertia potestas $a + r$. Quod &c.
	Quare &c.

Theo-

Theor. 9. Prop. 9.

SI trium quantitatum, prima maior fuerit, quàm secunda; tertia autem maior fuerit excessu ipsarum: excessus tertiæ, supra excessum primæ, & secundæ; erit excessus summæ ex secunda, & tertia, supra primam.

Hypoth.



Sit prima quantitas AB, maior, quàm secunda BC, quarum excessus CA: sitq; tertia D, maior, quàm CA.

Dico excessum D, supra CA, esse excessum summæ, ex D, & BC, supra BA.

Præpar.

Adponatur penes CB, & ipsi CA superponatur quantitas CE, æqualis ipsi D.

Demonstr.

Quoniam EA, est excessus EC supra CA; ideſt, excessus D, supra CA: necnon est excessus EB, supra BA; ideſt, summæ ex D, & BC, supra BA: per se patet, id quod propositum est.

Quare &c.

Theor. 10. Prop. 10.

INæqualium radicum, potestas maioris, vnà cum alternis nominibus eiusdem basis, demptis reliquis, æqueordinata relinquitur potestas differentiæ.

C Hy-

Hypoth.

Sint radices inæquales, t maior, a minor: quarum in tabula nominum, in basi tertia, potestas tertia maioris radicis $t3$, vnà cum alterno nomine $3ta2$, demptis reliquis nominibus $3t2a$, & $a3$, relinquitur quantitas $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$; sit autem differentia radicum $t - a$.

Dico $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$, potestatem tertiam esse $t - a$.

Oportet autem priùs demonstrare, in basibus præcedentibus, videlicet in secunda.

Dico itaque primò $t2 - 2ta + a2$, esse secundam potestatem $t - a$.

Demonstr.

def. 8. | $u; t : t; t2 : a; ta : t - a; t2 - ta.$
& 2. *b.* | $u; a : t; ta : a; a2 : t - a; ta - a2.$
| $t; a : t2; ta : ta; a2 : t2 - ta; ta - a2.$
ex 14.5 | ta, est maior, quàm $a2$.
| $t2 - ta$, est maior, quàm $ta - a2$.
9. *b.* | $t2 - ta$, dempta $ta - a2$, relinquitur $t2 - 2ta + a2$.
2. *b.* | $u; t - a : t - a; t2 - 2ta + a2.$
def. 6. | $t2 - 2ta + a2$ secunda est potestas $t - a$.
| Quod &c.
def. 8. & 2. *b.* | $u; t : t2; t3 : ta; t2a : a2; ta2 : t2 - 2ta + a2; t3 - 2t2a + ta2.$
| $u; a : t2; t2a : ta; ta2 : a2; a3 : t2 - 2ta + a2; t2a - 2ta2 + a3.$

$t; a:$

2. *h.* $t; a : t3 - 2t2a + ta2, t2a - 2ta2 + a3.$
ex 14.5 $t2 - 2t2a + ta2$, maior eſt, quàm $t2a - 2ta2 + a3$.
25. 5. $t2a + a3$, maior, quàm $2ta2$.
9. *h.* $t3 - 2t2a + ta2$, dempta $t2a - 2ta2 + a3$; relinquitur $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.
2. *h.* $u; t - a : t2 - 2ta + a2; t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.
def. 6. $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$, tertia eſt poteſtas $t - a$. Quod &c.
Quare &c.



Petrus Mengolus, Adm. R. D. Iacobo Venturolo, Scholarum Piarum Primario Arithmetices Praeceptori S. D.



Vos tibi primùm ostendi characteres, & numeros, libenter vidisse te significasti, & cum tua Scholæ profectu multiplicibus exemplis confirmasti. Immortales tibi ante omnia gratias debeo, quòd mea qualiacunque inuenta respexeris, & in tua Scholæ fructum conuerteris. Itaque pro redditione gratiarum, eamdem rem tibi aliquando gratam, iterum & pleniùs communico. Tu ergo libellum hunc in tuos vsus ita conuertes. Primùm per numerosam inductionem exemplorum, duo theoremata confirmabis præcedentis libelli, 8. & 10. quibus ars producendi potestates à duorum nominum aggregatis, vel relictis radicibus demonstratur. deinde singula in præsenti libello proposita. necnon alia plura, quæ tùm indico, tùm ipse tuopte poteris ingenio adijcere. Vale.

GEO.



GEOMETRIÆ SPECIOSÆ
ELEMENTVM SECVNDVM.
DEFINITIONES.

1 QVantitas vtcunque diuisa in duas partes, dicetur, Tota, & significabitur, charactere t.
2 Et partes Totæ, dicentur, Abscissa, & Residua: & significabitur abscissa, charactere a; & residua, r.

3. Potestates totæ, dicentur, Tota secunda, $t2$; Tota tertia, $t3$; & deinceps: & potestates abscissæ dicentur, Abscissa secunda, $a2$; Abscissa tertia, $a3$; & deinceps: item potestates residuæ, dicentur, Residua secunda, $r2$; Residua tertia, $r3$; & deinceps.

4. Si quadam quantitate, diuisa vtcunque in partes, abscissam, & residuam; concipiatur à rationali, per ipsas partes, abscissam primùm, deinde residuam, ordinata proportionalium tabula: & eadem quantitate rursum diuisa vtcumque; concipiatur ab eadem rationali, altera proportiona-

tionalium tabula: quantitates, quarum in vtrisque eædem appellationes, & ijdem characteres; dicentur, inuicem Synonymæ.

5. Item synonymarum æquemultiplices, dicentur, Synonymæ.

6. Ideoq; si etiam tabulæ nominum fuerint ordinatę; quantitates; quarum eadem sunt nomina, dicentur Synonimæ.

7. Vnitas ad omnes numeros, pro rationali semper habebitur. Vnde conuenienter significabatur rationalis, charactere *u*.

8. Cuiusque numeri, factis omnibus integris abscissionibus, omnium, totidemque synonymorum, summa, dicetur, Massa: & significabitur, littera maiuscula *O*, ante synonymorum characterem scripta: vt massa ex omnibus abscissis, *O. a.* & massa ex omnibus triplis biprimis, *O. 3a2r.*

9. Si cuiusque numeri, factis partibus, fuerit ordinata quædam tabula proportionalium, vel nominum; & loco cuiuslibet proportionalium, concipiatur massa suorum synonymorum: transformabitur tabula proportionalium in aliam, quæ dicetur, Tabula Speciosa.

10. In qua ordinatæ quantitates, dicentur, Species.

11. Tabula verò nominum transformabitur in aliam, quæ dicetur, Tabula Subquadratrix.

12. In qua ordinatæ quantitates, dicentur Subquadratrices.

13. Si

13. Si quælibet ſubquadratrix quantitas, multiplicata fuerit per numerum vnitate maiorem; quàm ſit ordo ſuæ baſis: producta quantitas, dicetur, Quadratrix.

14. Quod ſi, velut ex ſubquadratricibus, ita ex quadratricibus, tabula fuerit ordinata, dicetur Tabula Quadratrix.

15. Si duorum numerorum duæ ſpecioſæ tabulæ fuerint ordinatæ: maſſæ, quarum in vtriuſque ſunt eædem appellationes, & ijdem characteres, dicentur inuicem Homonymæ.

16. Item homonymarum maſſarum æquemultiplices, dicentur, Homonymæ.

17. Ideoque etiam in duabus ſubquadratricibus tabulis, aut in duabus quadratricibus, maſſæ, dicentur, Homonymæ.

18. Si tres numeri fuerint deinceps vnitate differentes; & medius dicatur, tota: maior quidem, dicetur, Seſquitota; & ſignificabitur, charactere *q*.

19. Minor verò, Semitota: & ſignificabitur, charactere *m*.

20. Et ſicut medij numeri poteſtates dicuntur totæ, ſecunda, tertia, & deinceps: ita maioris numeri poteſtates, dicentur, Seſquitotæ; ſecunda *q2*, tertia *q3*, & deinceps.

21. Minoris autem, Semitotæ; ſecunda *m2*, tertia *m3*, & deinceps.

22. Et ſicut medij numeri dicuntur Maſſæ, Species, Subquadratrices, & Quadratrices: ita maioris numeri, dicen-

centur, Sesquimassæ, Sesquispecies, Sesquisubquadratrices, & Sesquiquadratrices.

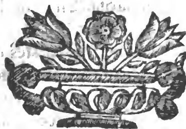
23. Et minoris, dicentur, Semimassæ, Semispecies, Semisubquadratrices, & Semiquadratrices.

24. Item, sicut totæ incrementum, est vnitas, ad componendam sesquitotam; & decrementum, est vnitas, ad relinquendam semitotam: ita cuiuslibet totæ, dicetur, Incrementum, numerus addendus, ad componendam sesquitotam æqueordinatam.

25. Et Decrementum, subtrahendus, ad relinquēdam semitotam æqueordinatam.

26. Item cuiuslibet massæ Incrementum, dicetur, sufficiens numerus, ad componendam homonymam sesquimassam.

27. Et Decrementum, ad relinquendam homonymam semimassam.



Ta-

Tabula Speciosa.

O.u

O.a O.r

O.a2 O.ar O.r2

O.a3 O.a2r O.ar2 O.r3

O.a4 O.a3r O.a2r2 O.ar3 O.r4

O.a5 O.a4r O.a3r2 O.a2r3 O.ar4 O.r5

Tabula Subquadratrix.

O.u

O.a O.r

O.a2 O.2ar O.r2

O.a3 O.3a2r O.3ar2 O.r3

O.a4 O.4a3r O.6a2r2 O.4ar3 O.r4

O.a5 O.5a4r O.10a3r2 O.10a2r3 O.5ar4 O.r5

Tabula Quadratrix.

O.u

O.2a O.2r

O.3a2 O.6ar O.3r2

O.4a3. O.12a2r O.12ar2 O.4r3

O.5a4 O.20a3r O.30a2r2 O.20ar3 O.5r4

O.6a5 O.30a4r O.60a3r2 O.60a2r3 O.30ar4 O.6r5

Postulatum vnicum.

Postuletur, vt massam assumere concedatur homonymam, & proportionalem ad propositam quamdam, sicut numeri, aut vnitas ad inuicem.

Theor. 1. *Prop.* 1.

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, & in qualibet baſi, ſpecies prima, & vltima, ſunt æquales; item ſecunda, & penultima; tertia, & tritultima; & ſic deinceps: item ſeſquiſpecies; & ſemiſpecies homonymæ: & ſpecierum incrementa, & decrementa. Similiter ſubquadratrices, in ſua tabula: & quadratrices, in ſua.

Hypoth. 1.

Sint in tabula ſpecioſa, cuiuſq; numeri, & in tertia baſi, prima ſpecies $O.a3$, & vltima $Or3$.

Dico, $O.a3$, $O.r3$, eſſe æquales.

Demonſtr.

def. 8.*h.* Nã cuiuſq; numeri, quot ſunt abſciſſiones, tot ſunt abſciſſæ, totidemq; reſiduæ: & abſciſſæ ſunt, vnitas, binarius, & deinceps: & reſiduæ ſunt, totidem ordinati, contrario tamen ordine, ſed deinceps, vſque ad binarium, & vnitatem. Quare vnaquæq; abſciſſa, vni reſiduæ eſt æqualis: & abſciſ-
p. p. ſa tertia, reſiduæ tertiæ; ad quas eadem rationalis, triplicatas habet eaſdem rationes: & omnes abſciſſæ tertiæ, omnibus reſiduis tertijs ſunt ęquales; ideſt, $O.a3$, $O.r3$, ſunt æquales. Quod &c.

Hypoth. 2.

Sint deinde, in eadẽ tertia baſi, ſecunda ſpecies $O.a2r$, & penultima $O.ar2$.

Dico, $O.a2r$, $O.ar2$, eſſe æquales.

De-

Demonſtr.

ſup. Singulæ *a*, ſingulis *r*, ſunt æquales: & ſingulæ *a2*, ſingulis *r2*: item ſingulæ biprimæ *a2r*, ſingulis vniſecundis *ar2*, ſunt æquales; *p. p.* ad quas *u*, rationes habet compoſitas ex ijſdem rationibus: quare omnes biprimæ *O. a2r*, omnibus vniſecundis *O.ar2*, ſunt æquales. Quod &c.

Hypoth. 3.

Sint ſeſquiſpecies *O.a2r*, *O.ar2*: vel ſint ſemiſpecies. Dico, *O.a2r*, *O.ar2*, eſſe æquales.

Demonſtratio.

def. 22. h. Quæ ſunt vnius cuiuſquam numeri ſeſquiſpecies; ſunt alius, vnitate maioris numeri ſpecies: *ſup.* ſed ſpecies *O.a2r*, *O.ar2*, ſunt æquales: ergo ſeſquiſpecies *O.a2r*, *O.ar2*, ſunt æquales. Quod &c.

def. 23. h. Item quæ ſunt vnius cuiuſquam numeri ſemiſpecies; ſunt alius, vnitate minoris numeri *ſup.* ſpecies: ſed ſpecies ſunt æquales: ergo & ſemiſpecies. Quod &c.

Dico *O. a2r*, & *O. ar2* incrementa eſſe æqualia, & decrementa æqualia.

Demonſtr.

Nam ab æqualibus ſpeciebus *O.a2r*, *O.ar2*, *ſup.* æquales demptæ ſemiſpecies homonymæ, relinquunt æqualia decrementa. Quod &c.

ſup. Et ab æqualibus ſeſquiſpeciebus, æquales

demptæ ſpecies homonymæ, relinquunt æqualia incrementa. Quod &c.

Hypoth. 4.

Sint in tabula ſubquadratrice, in tertia baſi, ſubquadratrices, ſecunda *O.3a2r*, & penultima *O.3ar2*.

Dico *O.3a2r*, *O.3ar2*, eſſe æquales.

Demonſtr.

def. 10. *p.* Quoniam in tabula multipliciũ, in tertia baſi, ſecundus numerus 3, & penultimus 3, ex ijſdem vtrimque vnitatibus, & numeris aggregati, ſunt æquales: æquemultiplicant ſpecies æquales, *O.a2r*, *O.ar2*; & ſubquadratrices producunt æquales, *O.3a2r*, *O.3ar2*. Quod &c. *ſup.* *def.* 12. *h.*

Vnde patet, quod & ſeſquiſubquadratrices ſunt æquales; & ſemiſubquadratrices æquales; & ſubquadratricum æqualia ſunt incrementa; & æqualia decrementa. Quæ &c.

Hypoth. 5.

Sint denique in tabula quadratrice, in tertia baſi, quadratrices, ſecunda *O.12a2r*, & penultima *O.12ar2*.

Dico, *O.12a2r*, & *O.12ar2*, eſſe æquales.

Demonſtr.

def. 13. *h.* Cum ſint enim æqualium ſubquadratricum æquemultiplices; inter ſe ſũt æquales. Quod &c.

Vnde conſtat, quod & ſeſquiquadratrices ſunt æquales; & ſemiquadratrices æquales; & quadratricum æqualia ſunt incrementa; & æqualia decrementa. Quæ &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 2. Prop. 2.

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, in duobus quibuſque lateribus, vna ſpecies, habet pro incremento, maſſas aggregatas, in vtrolibet latere, ſi quæ ſunt præcedentes, atque totam vnitate minùs ordinatam, quàm ſit ipſum latus: maſſas inquam, multiplicatas per numeros tabulæ multiplicium, in baſi acceptos, vnitate minùs ordinatã, quàm ſit alterum latus.

Hypoth. 1.

Eſto in tabula ſpecioſa, in primo, & in quintultimo latere, ſpecies *O.a4*: quam in quintultimo latere primam, nullæ ſpecies præcedunt: & eſto quarta tota *t4*.

Dico *O.a4*, incrementum eſſe *t4*.

Demonſtrat.

Eædem abſciſſiones totæ, quibus vnitas, binarius, & deinceps abſcinduntur; etiam ſeſquitotæ, ſunt abſciſſiones: & eædem vtrarumque ſunt abſciſſæ; necnon abſciſſæ quartæ. Sed præter abſciſſiones totæ, vna eſt vlterior abſciſſio ſeſquitotæ, qua ipſa tota abſcinditur: & pro qua poſt abſciſſas quartas totæ, & ſeſquitotę communes, accedit tota quarta, ſeſquitotæ propria: quæ ſpeciei *O. a4*, eſt incremẽtum, ad ſeſquiſpeciem componendam. Quod &c.

def. 18.h.

def. 26.h.

Hypoth. 2.

Eſto in tabula ſpecioſa, in quarto, & in vltimo latere, ſpecies *Q. r3*: quam in vltimo laterẽ

quar-

quartam, species præcedunt, tertia $O.r2$, secunda $O.r$, prima $O.u$: & esto tota vnitate minùs ordinata, quàm sit vltimum latus: quæ profectò, in
def. 7. p. ordine continuè proportionalium totarum, est
def. 7. 2. ipsa rationalis, atq; vnitas u. Et quoniam $O.r3$, est & in quarto latere, sumatur basis tabulæ multiplicium, vnitate minùs ordinata, nempe tertia, cuius numeri 3, 3.

Dico $O.r3$, incrementum esse, $O.3r2 + O.3r + O.u + u$.

Demonstr.

Eædem abscissiones, totæ sunt, & sesquitotæ: pro quibus vna pars incrementi $O.r3$ taxabitur. Præter abscissiones totæ, vna est vlterior abscissio sesquitotæ, pro qua pars altera eiusdem incrementi taxabitur. Rursum prima pars incrementi, tot ex partibus componitur, quot sunt abscissiones, totæ, & sesquitotæ communes.

Est autem pro vna abscissione, totæ, & sesquitotæ, communi, eadem quidem abscissa, sed non eadem residua. Cumque totæ residua est r, sesquitotæ residua est $r + u$: quoniam & ipsa sesquitota vnitate maior est, quàm tota. Cum er-
8. p. go totæ residua tertia est $r3$; sesquitotæ est, $r3 + 3r2u + 3ru2 + u3$. Et quoniam ratio æqualitatis, quantumlibet multiplicata, semper est ea-
7. 5. dem: & quantumlibet composita, non variat rationes, quibuscum componitur: huiusmodi autem

def. p. p. tem est *u* ad *u*, ad *u2*, ad *u3*: eadem ergo quantitas est *u3*, atque *u*: & *3ru2*, quæ *3r*: & *3r2u*, quæ *3r2*: & *r3* + *3r2u* + *3ru2* + *u3*, quæ *r3* + *3r2* + *3r* + *u*. & sesquitotæ residua tertia, est *r3* + *3r2* + *3r* + *u*. Sed totæ residua tertia, est *r3*: ergo cuiusque residuæ incrementum est *3r2* + *3r* + *u*. Et omnium residuarum, idest, *O.r3*, omnia incrementa sunt *O.3r2* + *O.3r* + *O.u*: totidem, quot sunt abscissiones communes, totæ, & sesquitotæ: & pars prima incrementi taxanda.

Pro vlteriori abscissione propria sesquitotæ, tota sit abscissa, cuius residua vnitas: & massæ *O.r3*, vlterior residua sit *u3*, idest *u*: pars altera incrementi taxanda. Quibus ex partibus, totum componitur incrementũ speciei *O.r3*, quod est, *O.3r2* + *O.3r* + *O.u* + *u*. Quod &c.

Hypoth. 3.

Esto in tabula speciosa, in quarto, & in quintultimo latere, species *O.a4r3*: quam in quintultimo latere præcedunt species, *O.a4r2*, *O.a4r*, *O.a4*: & esto tota *t4*, vnitate minùs ordinata, quàm sit latus quintultimum: & esto basis tertia multiplicium, vnitate minùs ordinata, quàm sit latus quartum; in qua basi, numeri sunt 3, & 3.

Dico *O.a4r3*, incrementum esse, *O.3a4r2* + *O.3a4r* + *O.a4* + *t4*.

De-

Demonstr.

Pro communibus enim totæ, & sesquitotæ abscissionibus; vna est pars incrementi: & pro abscissione vlteriori, propria sesquitotæ; est altera. Et prioris partis incrementi, tot sunt particulæ, quot sunt abscissiones communes; nempè, quot abscissæ, quot residuæ, quot quadritertiæ: & singulæ particulæ, singula sunt increméta quadritertiarum totæ, ad componendas quadritertias sesquitotæ.

Porrò totæ, & sesquitotæ, pro eadem abscissione, eadem est abscissa; sed non eadem residua: & eadem est abscissa quarta; sed non eadem residua tertia. cumque residua tertia totæ, est $r3$; residua tertia sesquitotæ, est $r3 + 3r2 + 3r + u$: & cum quadritertia totæ, est $a4r3$; quadritertia sesquitotæ est $a4r3 + 3a4r2 + 3a4r + a4$: & incrementum quadritertiæ, totæ, ad componendam quadritertiam sesquitotæ, est $3a4r2 + 3a4r + a4$. Et omnia simul incrementa quadritertiarum totæ, ad componendas omnes quadritertias sesquitotę, sunt $O.3a4r2 + O.3a4r + O.a4$, prior pars incrementi $O.a4r3$.

sup.

Pro vlteriori abscissione propria sesquitotę, abscissa est t, residua u: & abscissa quarta $t4$, residua tertia $u3$: & quadritertia vlterior propria sesquitotæ, est $t4u3$, vel $t4$: & est posterior pars incrementi $O.a4r3$. Ex quibus partibus integrum componitur incrementum $O.a4r3$, quod est,

sup.

$O.3a4r2$

$O.3a4r2 + O.3a4r + O.a4 + t4$. Quod &c.

Hypoth. 4.

Esto in tabula speciosa, in quinto, & in quartultimo latere, species $O.a3r4$: quam in quinto latere, precedũt species, $O.a2r4$, $O.ar4$, $O.r4$: & esto tota $t4$, vnitate minùs ordinata, quàm sit latus quintum: & esto basis tertia multiplicium, vnitate minùs ordinata, quàm sit latus quartultimum; in qua basi sunt numeri 3, 3.

Dico $O.a3r4$, incrementum esse, $O.3a2r4 + O.3ar4$, $+ O.r4 + t4$.

Demonst.

$O.3a4r2 : O.3a2r4$.
$O.3a4r : O.3ar4$.
p. h. $O.a4 : O.r4$.
$O.3a4r2 + O.3a4r + O.a4 : O.3a2r4 + O.3ar4 + O.r4$.

p. h. Sed $O.a4r3$, & $O.a3r4$ æqualia sunt incremẽta: & est $O.a4r3$ incrementum $O.3a4r2 +$
sup. $O.3a4r + O.a4 + t4$. Ergo etiam $O.a3r4$ incrementum est $O.3a2r4 + O.3ar4 + O.r4 + t4$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

IN tabula speciosa, cuiusque numeri, in duobus quibusque lateribus, vna species, habet pro decremento, massas in vno latere præcedentes, multiplicatas per numeros

tabulæ multiplicium, in basi acceptos, vnitate minùs ordinata, quàm sit alterum latus: proximam quidem massam, & alternas aggregatas; reliquas verò subtractas. Sed si nullæ sunt præcedentes; quòd species in ipso latere sit prima: pro decremento, habet semitotam, vnitate minùs ordinatam, quàm sit alterum latus.

Hypoth. 1.

Esto in tabula speciosa, in quinto, & in quartultimo latere, species $O.a3r4$, quam præcedentes, in quartultimo latere, sunt species, $O.a3r3$, $O.a3r2$, $O.a3r$, $O.a3$: quartæ autem basis tabulæ multipliciũ sint numeri 4,6,4.

Dico speciei $O.a3r4$, decrementum esse $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3$.

Demonstr.

Eædem abscissiones, quibus vnitas, binarius, & deinceps abscinduntur, etiam semitotæ sunt abscissiones; præter vnam propriam totæ, qua ipsa abscinditur semitota, & vnitas relinquitur. *def.19.b*

Quantum ad communes attinet abscissiones, cum eædem sint abscissæ, totæ, & semitotæ; non eædem sunt residuæ: cumque totæ residua sit r; semitotæ residua est $r - u$: & cum totæ residua quarta, sit $r4$; semitotæ residua quarta est $r4 - 4r3 + 6r2 - 4r + u$: cum deniq; totæ triquarta sit $a3r4$; semitotæ triquarta est $a3r4 - 4a3r3 + 6a3r2 - 4a3r + a3$. *10.p.*

Quantum ad non communem attinet abscissionem, si

resi-

resida vnitas, vnitate minuatur, profectò nihil remanet: eritque r quidem, vnitas; sed $r - u$, nihil: & erit $r4$, vnitas; sed $r4 - 4r3 + 6r2 - 4r + u$, nihil: & triquarta quidem totæ, erit $a3r4$; sed semitotæ alia vlterior quasi triquarta $a3r4 - 4a3r3 + 6a3r2 - 4a3r + a3$, nihil. Ideoque perinde est, proprias computare semitotę triquartas, pro communibus; atque vnam amplius adijcere triquartam nullam, pro non communi absciſſione. Quare omnes triquartę, semitotę, sunt $O.a3r4 - O.4a3r3 + O.6a3r2 - O.4a3r + O.a3$; reuera pauciores, quàm ipsius totæ sunt absciſſiones; sed perinde æquales, atque si totidem numerarentur. Totæ autem, triquartæ omnes, sunt $O.a3r4$; reuera totidem, quot sunt eius absciſſiones. Et vtrarumque differentia, $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3$, est decrementū speciei $O.a3r4$. Quod &c.

Hypoth. 2.

Esto in tabula speciosa, in quarto, & in quintultimo latere, species $O.a4r3$: quam præcedentes in quarto latere, sunt species, $O.a3r3$, $O.a2r3$, $O.ar3$, $O.r3$: quartæ autem basis tabulæ multiplicium, numeri sunt 4, 6, 4.

Dico speciei $O.a4r3$, decrementum esse $O.4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$.

Demonstr.

p. h. | $O.6a3r2 : O.6a2r3$.
| $O.4a3r : O.4ar3$.
| $O.a3 : O.r3$.
| $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3 : O.$

4a3r3 — O.6a2r3 + O.4ar3 — O.r3.

p. h. Sed O.a3r4, & O.a4r3, decrementa ſunt æqualia : & eſt O.a3r4, decrementum O.4a3r3

ſup. — 6a3r2 + O.4a3r — O.a3 : ergo etiam O.a4r3, decrementum eſt O.4a3r3 — O.6a2r3 + O.4ar3 — O.r3. Quod &c.

Hypoth. 3.

Eſto in quartultimo latere, prima ſpecies O.a3 : & eſto ſemitota tertia m3.

Dico, decrementum O.a3, eſſe m3.

Demonſtr.

Pro communibus enim totæ, & ſemitotæ abſciſſionibus, cædem vtrarumq; ſunt abſciſſæ, & in propoſita ſpecie O.a3, reſiduæ nullæ : pro vlteriori verò abſciſſione, totæ propria, vltima eſt abſciſſa, vnitate minor, quàm tota, id-eſt, ſemitota m : & vltima abſciſſa tertia, propria totæ, eſt m3. Quare ſpeciei O.a3, decrementũ eſt m3. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. *Prop.* 4.

Tota quælibet, eſt æqualis, aggregatis omnibus minùs ordinatarum abſciſſarum ſpeciebus, & vnitati, acceptis ſecundum numeros multiplices, in baſi ſibi æquè-ordinata iacentes.

Hypoth.

Eſto tota quinta 15 ; qua minùs ordinatæ abſciſſæ, a4, a3, a2, a, u ; quarum ſpecies, O.a4, O.a3, O.a2, O.a, O.u:

$O.u$: & esto basis quinta multiplicium, cuius numeri, 5, 10, 10, 5.

Dico $t5 : O.5a4 + O.10a3 + O.10a2 + O.5a + O.u + u$.

Demonstratio.

p. b. | $O.a5$, & $O.r5$, æqualia sunt incrementa: quorum alterum, $t5$; alterum, $O.5a4 + O.10a3 + O.10a2 + O.5a + O.u + u$. Quòd &c.

2. b. | Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

Demonstrare, qualiter acceptis totis, quæque massa est æqualis.

Methodus Demonstrationis.

Oportet in demonstrando, procedere, à prioribus basibus tabulæ speciosæ, ad posteriores; & in singulis basibus, ab exterioribus speciebus, ad interiores.

| Porrò in singulis basibus, pro prima, & vltima specie, vna est demonstratio; item pro secunda, & penultima; pro tertia, & tritultima. Nam, verbi gratia, secunda, qualiter acceptis totis demonstrabitur æqualis; taliter acceptis, æqualis erit etiã penultima: quia constat, secundam, & penultimam, esse æquales.

p. b.

Sub hoc vno titulo, theoremata conueniunt innumerabilia: cum enim tabula speciosa, sit producibilis in infinitum, habet massas innumerabiles; idest, semper plures,

quàm

quàm quot quiſque aſſignauerit.

Vna tamen eſt omnium communis methodus demonſtrandi, & duo ſunt argumenta: vnum, ab æqualibus cuiuſdam ſpeciei incrementis; alterum ab æqualibus decrementis.

Pro vlteriori methodi ennarratione, dabimus triginta ſex theoremata; quæ ſufficiunt, pro vertice, & baſibus tabulæ ſpecioſæ, vſque ad decimam incluſiuè: quædam demonſtrata per vtrumque argumentum; quædam ſolùm per alterum; quædam denique ſine demonſtratione.

1. O.*u*: *t*—*u*.

Demonſtr. 1.

4. *h.* | O.*u*+*u*: *t*.
| O.*u*: *t*—*u*. Quod &c.

Demonſtr. 2.

| O.*a*. decrementa ſunt æqualia.
3. *h.* | O.*u*: *m*.
def. 19.*h.* | *m*: *t*—*u*.
| O.*u*: *t*—*u*. Quod &c.

---

2. O.2*a*: *t*2—*t*.

Demonſtr. 1.

4. *h.* | O.2*a*+O.*u*+*u*: *t*2.
| O.2*a*: *t*2—O.*u*—*u*.
ſup. 1. | O.*u*: *t*—*u*.
p. *h.* | O.2*a*: *t*2—*t*. Quod &c.

De-

Demonstr. 2.

	O.a2, decrementa sunt æqualia.
3. b.	O. 2a — Ou : m2.
	O. 2a : m2 + O.u.
def. 21. b.	m2 : t2 — 2t + u.
sup. p.	O. u : t — u.
	O. 2a : t2 — t. Quòd &c.

---

3. O.6a2 : 2t3 — 3t2 + t.

Demonstr. 1.

4. b.	O. 3a2 + O.3a + O.u + u : t3.
	O.6a2 + O.6a + O. 2u + 2 : 2t3.
	O.6a2 : 2t3 — O.6a — O. 2u — u.
sup. 2.	O.6a : 3t2 — 3t.
sup. p.	O. 2u : 2t — 2.
	O.6a2 : 2t3 — 3t2 + t. Quod &c.

Demonstr. 2.

	O.a3, decrementa sunt æqualia.
3. b.	O.3a2 — O.3a + O.u : m3.
	O.6a2 — O.6a + O.2u : 2m3.
	O.6a2 : 2m3 + O.6a — O. 2u.
def. 21. b	2m3 : 2t3 — 6t2 + 6t — 2.
sup. 2.	O.6a : 3t2 — 3t.
sup. p.	O. 2u : 2t — 2.
	O.6a2 : 2t3 — 3t2 + t. Quod &c.

---

4. $O.6ar : t3 - t.$

Demonstr. 1.

	$O.a2r$, incrementa sunt æqualia.
2. *h.*	$O.2ar + Or + t : O.a2 + t2.$
	$O.12ar + O.6r + 6t : O.6a2 + 6t2.$
	$O.12ar : O.6a2 - O.6r + 6t2 - 6t.$
sup. 3.	$O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$
sup. 2.	$O.6r : 3t2 - 3t.$
	$O.12ar : 2t3 - 2t.$
	$O.6ar : t3 - t.$ Quod &c.

Demonstr. 2.

	$O.a2r$, decrementa sunt æqualia.
3. *h.*	$O.2ar - O.r : O.a2.$
	$O.12ar - O.6r : O.6a2.$
	$O.12ar : O.6a2 + O.6r.$
sup. 3.	$O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$
sup. 2.	$O.6r : 3t2 - 3t.$
	$O.12ar : 2t3 - 2t.$
	$O.6ar : t3 - t.$ Quod &c.

---

5. $O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$

Demonstr.

4. *h.*	$O.4a3 + O.6a2 + O.4a + O.u + u : t4.$
sup. p.	$O.u : t - u.$
sup. 2.	$O.4a : 2t2 - 2t.$
sup. 3.	$O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$

$O.4a3$

| $O.4a3 + 2t3 -- t2 : t4.$
| $O.4a3 : t4 -- 2t3 + t2.$ Quòd &c.

---

6. $O.12a2r : t4 -- t2.$ *Demonst.* 1.

$O.a3r$, incrementa sunt æqualia.

2. *h.* $O.3a2r + O.3ar + O.r + t : O.a3 + t3.$

$O.12a2r + O.12ar + O.4r + 4t : O.4a3 + 4t3.$

sup. 4. & 2. $O.12ar : 2t3 -- 2t.$ $O.4r : 2t2 -- 2t.$

sup 5. $O.4a3 : t4 -- 2t3 + t2.$

$O.12a2r + 2t3 + 2t2 : t4 + 2t3 + t2.$

$O.12a2r : t4 -- t2.$ Quod &c. *Demonst.* 2.

$O.a3r$, decrementa sunt æqualia.

3. *h.* $O.3a2r -- O.3ar + O.r : O.a3.$

$O.12a2r -- O.12ar + O.4r : O.4a3.$

sup. 4. $O.12ar : 2t3 -- 2t.$

sup. 2. $O.4r : 2t2 -- 2t.$

sup. 5. $O.4a3 : t4 -- 2t3 + t2.$

$O.12a2r -- 2t3 + 2t2 : t4 -- 2t3 + t2.$

$O.12a2r : t4 -- t2.$ Quod &c.

---

7. $O.30a4 : 6t5 -- 15t4 + 10t3 -- t.$

Demonstr.

4. *h.* $O.5a4 + O.10a3 + O.10a2 + O.5a + O.u + u : t5.$

$O.60a4 + O.120a3 + O.120a2 + O.60a + O.12u$

sup. 2. $+ 12u : 12t5.$ $O.60a : 30t2 + 30t.$

sup. 3. $O.120a2 : 40t3 -- 60t2 + 20t.$

sup. 5. $O.120a3 : 30t4 -- 60t3 + 30t2.$

sup. p. | O.12u : 12t — 12.
| O.60a4 + 30t4 — 20t3 + 2t : 12t5.
| O.30a4 + 15t4 — 10t3 + t : 6t5.
| O.30a4 : 6t5 — 15t4 + 10t3 — t. Quod &c.

---

8. O.60a3r : 3t5 — 5t3 + 2t.

Demonstr.

| O.a4r, decrementa sunt æqualia.
3. b. | O.4a3r — O.6a2r + O.4ar — Or : O.a4.
| O.120a3r — O.180a2r + O.120ar — O.30r : O.30a4.
sup. 6. | O.180a2r : 15t4 — 15t2.
sup. 4. | O.120ar : 20t3 — 20t.
sup. 2. | O.30r : 15t2 — 15t.
sup. 7. | O.30a4 : 6t5 — 15t4 + 10t3 — t.
| O.120a3r — 15t4 + 20t3 — 5t : 6t5 — 15t4 + 10t3 — t.
| O.120a3r : 6t5 — 10t3 + 4t.
| O.60a3r : 3t5 — 5t3 + 2t. Quod &c.

---

9. O.30a2r2 : t5 — t.

Demonstr.

| O.a3r2, decrementa sunt æqualia.
3. b. | O.3a2r2 — O.3ar2 + Or2 : O.2a3r — O.a3.
| O.180a2r2 — 180ar2 + O.60r2 : O.120a3r + O.60a3.
sup. 6. | O.180ar2 : 15t4 — 15t2.

O.60r2 :

sup. 3. | *0.6or2 : 2ot3 — 3ot2 + 1ot.*

sup. 8. | *0.12oa3r : 6t5 — 1ot3 + 4t.*

sup. 5. | *0.6oa3 : 15t4 — 3ot3 + 15t2.*

| *0.18oa2r2 — 15t4 + 2ot3 — 15t2 + 1ot : 6t5.*

| *— 15t4 + 2ot3 — 15t2 + 4t.*

| *0.18oa2r2 : 6t5 — 6t.*

| *0.3oa2r2 : t5 — t.* Quod &c.

---

10. *0.12a5 : 2t6 — 6t5 + 5t4 — t2.*

11. *0.6oa4r : 2t6 — 5t4 + 3t2.*

12. *0.6oa3r2 : t6 — t2.*

13. *0.42a6 : 6t7 — 21t6 + 21t5 — 7t3 + t.*

14. *0.84a5r : 2t7 — 7t5 + 7t3 — 2t.*

15. *0.21oa4r2 : 2t7 — 7t3 + 5t.*

16. *0.42oa3r3 : 3t7 + 7t3 — 1ot.*

17. *0.24a7 : 3t8 — 12t7 + 14t6 — 7t4 + 2t2.*

18. *0.168a6r : 3t8 — 14t6 + 21t4 — 1ot2.*

19. *0.168a5r2 : t8 — 7t4 + 6t2.*

20. *0.84oa4r3 : 3t8 + 7t4 — 1ot2.*

21. *0.90.a8 : 1ot9 — 45t8 + 6ot7 — 42t5 + 2ot3 — 3t.*

22. *0.36oa7r : 5t9 — 3ot7 + 63t5 — 5ot3 + 12t.*

23. *0.126oa6r2 : 5t9 — 63t5 + 1oot3 — 42t.*

24. *0.252oa5r3 : 5t9 + 21t5 — 11ot3 + 84t.*

25. *0.63oa4r4 : t9 + 2ot3 — 21t.*

26. *0.2oa9 : 2t1o — 1ot9 + 15t8 — 14t6 + 1ot4 — 3t2.*

27. *0.180a8r : 2t10 — 15t8 + 42t6 — 50t4 + 21t2.*
28. *0.360a7r2 : t10 — 21t6 + 50t4 — 30t2.*
29. *0.840a6r3 : t10 + 7t6 — 50t4 + 42t2.*
30. *0.1260a5r4 : t10 + 20t4 — 21t2.*
31. *0.66a10 : 6t11 — 33t10 + 55t9 — 66t7 + 66t5 — 33t3 + 5t.*
32. *0.660a9r : 6t11 — 55t9 + 198t7 — 330t5 + 231t3 — 50t.*
33. *0.990a8r2 : 2t11 — 66t7 + 220t5 — 231t3 + 75t.*
34. *0.1320a7r3 : t11 + 11t7 — 110t5 + 198t3 — 100t.*
35. *0.2310a6r4 : t11 + 55t5 — 231t3 + 175t.*
36. *02772a5r5 : t11 — 22t5 + 231t3 — 210t.*

Et in infinitum, eadem methodo ſupra tradita, poteſt demonſtrari, qualiter acceptis totis, quæque maſſa eſt æqualis.

Theor. 6. Prop. 6.

DEmonſtrare, qualiter acceptis ſemitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

Meth. Demonſtr.

Oportet præſupponere theoremata demonſtrata in præcedenti, ſua cuiuſque maſſæ propria: deinde totas reſoluere in ſemitotas, per *def.* 19.*h.* & per 8.*p.* vt ſequitur.

t : m + n.

t2 : m2 + 2m + n.

t3 :

$13 : m3+3m2+3m+u.$

$14 : m4+4m3+6m2+4m+u.$

$15 : m5+5m4+10m3+10m2+5m+u.$

$16 : m6+6m5+15m4+20m3+15m2+6m+u.$

$17 : m7+7m6+21m5+35m4+35m3+21m2+7m+u.$

$18 : m8+8m7+28m6+56m5+70m4+56m3+28m2+8m+u.$

$19 : m9+9m8+36m7+84m6+126m5+126m4+84m3+36m2+9m+u.$

$110 : m10+10m9+45m8+120m7+210m6+252m5+210m4+120m3+45m2+10m+u.$

$111 : m11+11m10+55m9+165m8+330m7+462m6+462m5+330m4+165m3+55m2+11m+u.$

Vnde, pro triginta ſex theorematis propoſitis in præcedenti, & demonſtrabilibus, alia triginta ſex proponemus, in præſenti, demonſtrabilia, videlicet.

1. $O.u:m.$
2. $O.2a:m2+m.$
3. $O.6a2:2m3+3m2+m.$
4. $O.6ar:m3+3m2+2m.$
5. $O.4a3:m4+2m3+m2.$
6. $O.12a2r:m4+4m3+5m2+2m.$
7. $O.30a4:6m5+15m4+10m3-m.$
8. $O.60a3r:3m5+15m4+25m3+15m2+2m.$

9. O.3oa2r2 : m5 + 5m4 + 10m3 + 10m2 + 4m.

10. O.12a5 : 2m6 + 6m5 + 5m4 — m2.

11. O.60a4r : 2m6 + 12m5 + 25m4 + 20m3 + 3m2 — 2m.

12. O.60a3r2 m6 + 6m5 + 15m4 + 20m3 + 14m2 + 4m.

13. O.42a6 : 6m7 + 21m6 + 21m5 — 7m3 + m.

14. O.84a5r : 2m7 + 14m6 + 35m5 + 35m4 + 7m3 — 7m2 — 2m.

15. O.210a4r2 : 2m7 + 14m6 + 42m5 + 70m4 + 63m3 + 21m2 — 2m.

16. O.420a3r3 : 3m7 + 21m6 + 63m5 + 105m4 + 112m3 + 84m2 + 32m.

17. O.24a7 : 3m8 + 12m7 + 14m6 — 7m4 + 2m2.

18. O.168a6r : 3m8 + 24m7 + 70m6 + 84m5 + 21m4 — 28m3 — 10m2 + 4m.

19. O.168a5r2 : m8 + 8m7 + 28m6 + 56m5 + 63m4 + 28m3 — 8m2 — 8m.

20. O. 840a4r3 : 3m8 + 24m7 + 84m6 + 168m5 + 217m4 + 196m3 + 116m2 + 32m.

21. O.90a8 : 10m9 + 45m8 + 60m7 — 42m5 + 20m3 — 3m.

22. O.360a7r : 5m9 + 45m8 + 150m7 + 210m6 + 63m5 — 105m4 — 50m3 + 30m2 + 12m.

23. O.1260a6r2 : 5m9 + 45m8 + 180m7 + 420m6 + 567m5 + 315m4 — 110m3 — 150m2 — 12m.

24. O.2520a5r3 : 5m9 + 45m8 + 180m7 + 420m6 + 651m5

651m5 + 735m4 + 520m3 + 60m2 — 96m.

25. 0.630a4r4: m9 + 9m8 + 36m7 + 84m6 + 126m5 + 126m4 + 104m3 + 96m2 + 48m.

26. 0.20a9: 2m10 + 10m9 + 15m8 — 14m6 + 10m4 — 3m2.

27. 0.180a8r: 2m10 + 20m9 + 75m8 + 120m7 + 42m6 — 84m5 — 50m4 + 40m3 + 21m2 — 6m.

28. 0.360a7r2: m10 + 10m9 + 45m8 + 120m7 + 189m6 + 126m5 — 55m4 — 100m3 + 24m.

29. 0.840a6r3: m10 + 10m9 + 45m8 + 120m7 + 217m6 + 294m5 + 265m4 + 60m3 — 108m2 — 64m.

30. 0.1260a5r4: m10 + 10m9 + 45m8 + 120m7 + 210m6 + 252m5 + 230m4 + 200m3 + 144m2 + 48m.

31. 0.66a10: 6m11 + 33m10 + 55m9 — 66m7 + 66m5 — 33m3 + 5m.

32. 0.660a9r: 6m11 + 66m10 + 275m9 + 495m8 + 198m7 — 462m6 — 330m5 + 330m4 + 231m3 — 99m2 — 50m.

33. 0.990a8r2: 2m11 + 22m10 + 110m9 + 330m8 + 594m7 + 462m6 — 242m5 — 550m4 — 11m3 + 231m2 + 42m.

34. 0.1320a7r3: m11 + 11m10 + 55m9 + 165m8 + 341m7 + 539m6 + 583m5 + 165m4 — 352m3 — 220m2 + 32m.

35. 0.2310a6r4: m11 + 11m10 + 55m9 + 165m8 +

330m7

$330m7+462m6+517m5+605m4+484m3-88m2+232m.$

36. $0.2772a5r5 : m11+11m10+55m9+165m8+330m7+462m6+440m5+220m4+176m3+528m2+384m.$

Sicut autem possibile est, vltra decimam basim speciosæ tabulæ, in demonstrando procedere, in præcedenti; & ostendere, qualiter acceptis totis quæque massa est æqualis: ita possibile est in præsenti procedere; & demonstrare, qualiter acceptis semitotis, quæque massa est æqualis.

Theor. 7. Prop. 7.

DEmonstrare, qualiter acceptis sesquitotis, quæque massa est æqualis.

Meth. Demonstr.

Oportet præsupponere theoremata, demonstrata sub titulo *prop.* 5. *h.* sua cuiusque propria: deinde totas resoluere in sesquitotas per *def.* 18. *h.* & per 10. *p.* vt sequitur.

$t : q-u.$

$t2 : q2-2q+u.$

$t3 : q3-3q2+3q-u.$

$t4 : q4-4q3+6q2-4q+u.$

$t5 : q5-5q4+10q3-10q2+5q-u.$

$t6 : q6-6q5+15q4-20q3+15q2-6q+u.$

$t7 : q7-7q6+21q5-35q4+35q3-21q2+7q-u.$

$t8 : q8-8q7+28q6-56q5+70q4-56q3+28q2-8q+u.$

t9 : q9 — 9q8 + 36q7 — 84q6 + 126q5 — 126q4 + 84q3
— 36q2 + 9q — u.

t10 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 210q6 — 252q5
+ 210q4 — 120q3 + 45q2 — 10q + u.

t11 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6
+ 462q5 — 330q4 + 165q3 — 55q2 + 11q — u.

Vnde, pro triginta ſex theorematis, propoſitis in 5.*h.* alia triginta ſex proponemus, in præſenti, demonſtrabilia, videlicet.

1. O.u : q — 2.
2. O.2a : q2 — 3q + 2.
3. O.6a2 : 2q3 — 9q2 + 13q — 6.
4. O.6ar : q3 — 3q2 + 2q.
5. O.4a3 : q4 — 6q3 + 13q2 — 12q + 4.
6. O.12a2r : q4 — 4q3 + 5q2 — 2q.
7. O.30a4 : 6q5 — 45q4 + 130q3 — 180q2 + 119q
— 30.
8. O.60a3r : 3q5 — 15q4 + 25q3 — 15q2 + 2q.
9. O.30a2r2 : q5 — 5q4 + 10q3 — 10q2 + 4q.
10. O.12a5 : 2q6 — 18q5 + 65q4 — 120q3 + 119q2 —
60q + 12.
11. O.60a4r : 2q6 — 12q5 + 25q4 — 20q3 + 3q2 + 2q.
12. O.60a3r2 : q6 — 6q5 + 15q4 — 20q3 + 14q2 — 4q.
13. O.42a6 : 6q7 — 63q6 + 273q5 — 630q4 + 833q3
— 630q2 + 253q — 42.
14. O.84a5r : 2q7 — 14q6 + 35q5 — 35q4 + 7q3 +
7q2 — 2q.

15. O.210a4r2: 2q7 — 14q6 + 42q5 — 70q4 + 63q3 — 21q2 — 2q.

16. O.420a3r3: 3q7 — 21q6 + 63q5 — 105q4 + 112q3 — 84q2 + 32q.

17. O.24a7: 3q8 — 36q7 + 182q6 — 504q5 + 833q4 — 840q3 + 506q2 — 168q + 24.

18. O.168a6r: 3q8 — 24q7 + 70q6 — 84q5 + 21q4 + 28q3 — 10q2 — 4q.

19. O.168a5r2: q8 — 8q7 + 28q6 — 56q5 + 63q4 — 28q3 — 8q2 + 8q.

20. O.840a4r3: 3q8 — 24q7 + 84q6 — 168q5 + 217q4 — 196q3 + 116q2 — 32q.

21. O.90a8: 10q9 — 135q8 + 780q7 — 2520q6 + 4998q5 — 6300q4 + 5060q3 — 2520q2 + 717q — 90.

22. O.360a7r: 5q9 — 45q8 + 150q7 — 210q6 + 63q5 + 105q4 — 50q3 — 30q2 + 12q.

23. O.1260a6r2: 5q9 — 45q8 + 180q7 — 420q6 + 567q5 — 315q4 — 110q3 + 150q2 — 12q.

24. O.2520a5r3: 5q9 — 45q8 + 180q7 — 420q6 + 651q5 — 735q4 + 520q3 — 60q2 — 96q.

25. O.630a4r4: q9 — 9q8 + 36q7 — 48q6 + 126q5 — 126q4 + 104q3 — 96q2 + 48q.

26. O.20a9: 2q10 — 30q9 + 195q8 — 720q7 + 1666q6 — 2520q5 + 2530q4 — 1680q3 + 717q2 — 180q + 20

27. O.180a8r: 2q10 — 20q9 + 75q8 — 120q7 + 42q6 + 84q5 — 50q4 — 40q3 + 21q2 + 6q.

28. O.

28. 0.36oa7r2 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 189q6 — 126q5 — 55q4 + 100q3 — 24q.

29. 0.84oa6r3 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 217q6 — 294q5 + 265q4 — 60q3 — 108q2 + 64q.

30. 0.126oa5r4 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 210q6 — 252q5 + 230q4 — 200q3 + 144q2 — 48q.

31. 0.66a10 : 6q11 — 99q10 + 715q9 — 2970q8 + 7854q7 — 13860q6 + 16698q5 — 13860q4 + 7887q3 — 2970q2 + 665q — 66.

32. 0.66oa9r : 6q11 — 66q10 + 275q9 — 495q8 + 198q7 + 462q6 — 330q5 — 330q4 + 231q3 + 99q2 — 50q.

33. 0.99oa8r2 : 2q11 — 22q10 + 110q9 — 330q8 + 594q7 — 462q6 — 242q5 + 550q4 — 11q3 + 231q2 + 42q.

34. 0.132oa7r3 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 341q7 — 539q6 + 583q5 — 165q4 — 352q3 + 220q2 + 32q.

35. 0.231oa6r4 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 517q5 — 605q4 + 484q3 + 88q2 — 232q.

36. 0.2772a5r5 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 440q5 — 220q4 + 176q3 — 528q2 + 384q.

Sicut autem possibile est, vltra decimam basim speciosę tabulæ demonstrare, qualiter acceptis totis quæque massa est æqualis, iuxta methodum 5 ¶o ita possibile est, etiam in

præſenti procedere in infinitum, & demonſtrare, etiam vltra decimam baſim, qualiter acceptis ſeſquitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

Theor. 8. *Prop.* 8.

Demonſtrare, qualiter acceptis primi lateris ſpeciebus, quæque maſſa eſt æqualis.

Meth. Demonſtr.

Sub hoc vno titulo, innumerabilia theoremata cenſeri poſſent, quorum vna communis eſt methodis demonſtrandi, per 5. *h.* reſoluendo maſſas, in totas ſibi æquales; & per 4. *h.* reſoluendo totas, in ſpecies primi lateris ſibi æquales.

Pro vlteriori methodi enarratione, proponemus viginti quinque theoremata, vnum cum demonſtratione, & reliqua ſine demonſtratione: quæ poſſunt facilè demonſtrari, ſecundum methodum aſſignatam.

1. $O2ar : O.a2 + O.a.$

Demonſtr.

5. *h.* | $O.6ar : t3 - t.$
4. *h.* | $t3 : O.3a2 + O.3a + O.u + u.$
| $t : O.u + u.$
| $O.6ar : O.3a2 + O.3a.$
| $O.2ar : O.a2 + O.a.$ Quod, &c.

2. $O.6a2r : O.2a3 + O.3a2 + O.a.$

3. $O.4a3r : O.a4 + O.2a3 + O.a2.$

4. O.

4. 0.6a2r2: 0.a4+0.2a3+0.2a2+0.a.
5. 0.30a4r: 0.6a5+0.15a4+0.10a3 — 0.a.
6. 0.60a3r2: 0.6a5+0.15a4+0.20a3+0.15a2
+0.4a.
7. 0.12a5r: 0.2a6+0.6a5+0.5a4 — 0.a2.
8. 0.30a4r2: 0.2a6+0.6a5+0.10a4+0.10a3+
0.3a2 — 0.a.
9. 0.20a3r3: 0.a6+0.7a5+0.5a4+0.5a3+0.4a2
+0.2a.
10. 0.42a6r: 0.6a7+0.21a6+0.21a5 — 0.7a3+0.a.
11. 0.84a5r2: 0.4a7+0.14a6+0.28a5+0.35a4+
0.14a3 — 0.7a2 — 0.4a.
12. 0.420a4r3: 0.12a7+0.42a6+0.84a5+0.105a4
+0.98a3+0.63a2+0.16a.
13. 0.24a7r: 0.3a8+0.12a7+0.14a6 — 0.7a4+
0.2a2.
14. 0.84a6r2: 0.3a8+0.12a7+0.28a6+0.42a5+
0.21a4 — 0.14a3 — 0.10a2+0.2a.
15. 0.168a5r3: 0.3a8+0.12a7+0.28a6+0.42a5
0.49a4+0.42a3+0.4a2 — 0.12a.
16. 0.210a4r4: 0.3a8+0.12a7+0.28a6+0.42a5+
0.42a4+0.28a3+0.32a2+0.23a.
17. 0.90a8r: 0.10a9+0.45a8+0.60a7 — 0.42a5+
0.20a3 — 0.3a.
18. 0.360a7r2: 0.10a9+0.45a8+0.120a7+
0.210a6+0.126a5 — 0.105a4 — 0.100a3+
0.30a2+0.24a.

19. 0.

præſenti procedere in infinitum, & demonſtrare, etiam, vltra decimam baſim, qualiter acceptis ſeſquitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

Theor. 8. *Prop* 8.

Demonſtrare, qualiter acceptis primi lateris ſpeciebus, quæque maſſa eſt æqualis.

Meth. Demonſtr.

Sub hoc vno titulo, innumerabilia theoremata cenſeri poſſent, quorum vna communis eſt methodis demonſtrandi, per 5. *h.* reſoluendo maſſas, in totas ſibi æquales; & per 4. *h.* reſoluendo totas, in ſpecies primi lateris ſibi æquales.

Pro vlteriori methodi enarratione, proponemus viginti quinque theoremata, vnum cum demonſtratione, & reliqua ſine demonſtratione: quæ poſſunt facilè demonſtrari, ſecundum methodum aſſignatam.

1. *O2ar: O.a2+O.a.*

Demonſtr.

5. *h.* | *O.6ar : t3 — t.*
4. *h.* | *t3 : O.3a2+O.3a+O.u+u.*
| *t : O.u+u.*
| *O.6ar : O.3a2+O.3a.*
| *O.2ar : O.a2+O.a.* Quod, &c.

2. *O.6a2r : O.2a3+O.3a2+O.a.*

3. *O.4a3r : O.a4+O.2a3+O.a2.*

4. *O.*

4. O.6a2r2:O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.

5. O.30a4r:O.6a5+O.15a4+O.10a3—O.a.

6. O.60a3r2:O.6a5+O.15a4+O.20a3+O.15a2 +O.4a.

7. O.12a5r:O.2a6+O.6a5+O.5a4—O.a2.

8. O.30a4r2:O.2a6+O.6a5+O.10a4+O.10a3+ O.3a2—O.a.

9. O.20a3r3:O.a6+O.7a5+O.5a4+O 5a3+O.4a2 —O.2a.

10. O.42a6r:O.6a7+O.21a6+O.21a5—O.7a3+O.a.

11. O.84a5r2:O.4a7+O.14a6+O.28a5+O.35a4+ O.14a3—O.7a2—O.4a.

12. O.420a4r3:O.12a7+O.42a6+O.84a5+O.105a4 +O.98a3+O.63a2+O.16a.

13. O.24a7r:O.3a8+O.12a7+O.14a6—O.7a4+ O.2a2.

14. O.84a6r2:O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5+ O.21a4—O.14a3—O.10a2+O.2a.

15. O.168a5r3:O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5 O.49a4+O.42a3+O.4a2—O.12a.

16. O.210a4r4:O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5+ O.42a4+O. 8a3+O.32a2+O.23a.

17. O.90a8r:O.10a9+O.45a8+O.60a7—O.42a5+ O.20a3—O.3a.

18. O.360a7r2: O.10a9+O.45a8+O.120a7+ O.210a6+O.126a5—O105a4—O100a3+ O.30a2+O.24a.

19. O.

19. 0.840a6r3 : 0.10a9 + 0.45a8 + 0.120a7 +
0.210a6 + 0.294a5 + 0.315a4 + 0.60a3 +
0.159a2 + 0.64a.

20. 0.1260a5r4 : 0.10a9 + 0.45a8 + 0.120a7 +
0.210a6 + 0.252a5 + 0.210a4 + 0.200a3 +
0.165a2 + 0.48a.

21. 0.20a9r : 0.2a10 + 0.10a9 + 0.15a8 — 0.14a6
+ 0.10a4 + 0.3a2.

22. 0.90a8r2 : 0.2a10 + 0.10a9 + 0.30a8 + 0.60a7
+ 0.42a6 — 0.42a5 + 0.50a4 + 0.20a3 + 0.21a2
— 0.3a.

23. 0.120a7r3 : 0.a10 + 0.5a9 + 0.15a8 + 0.30a7 +
0.49a6 + 0.63a5 + 0.15a4 + 0.50a3 + 0.20a2
+ 0.12a.

24. 0.210a6r4 : 0.a10 + 0.5a9 + 0.15a8 + 0.30a7 +
0.42a6 + 0.42a5 + 0.55a4 + 0.65a3 + 0.8a2 —
0.37a.

25. 0.252a5r5 : 0.a10 + 0.5a9 + 0.15a8 + 0.30a7 +
0.42a6 + 0.42a5 + 0.20a4 — 0.5a3 + 0.48a2 +
0.54a.

Aliaque possunt in infinitum proponi theoremata, & demonstrari, quibus pateat, qualiter acceptis primo lateris speciebus, quęque massa est æqualis.

Theor. 9. Prop. 9.

DEmonstrare, quæ, & qualiter acceptæ totæ species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant. Ex

Ex innumerabilibus theorematis, quæ sunt huius tituli, proponimus viginti quinque: & ex his quatuor solùmodo demonstramus; quæ sufficiunt, ad ostendendã methodum.

1. *O.2a2+t2 : O.4ar+t.*

Demonstr.

5. b. | *O.6a2 : 2t3 — 3t2+t.*
| *O.6a2+3t2 — t : 2t3.*
5. b. | *O.6ar : t3 — t.* *O.12ar : 2t3 — 2t.*
| *O.12ar+2t : 2t3.*
| *O.6a2+3t2 — t : O.12ar+2t.*
| *O.6a2+3t2 : O.12ar+3t.*
| *O.2a2+t2 : O.4ar+t.* Quod &c.

---

2. *O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.*

Demonstr.

5. b. | *O.4a3 : t4 — 2t3+t2.* *O.4a3+2t3 — t2 : t4.*
5. b. | *O.12a2r : t4 — t2.* *O.12a2r+t2 : t4.*
| *O.4a3+2t3 — t2 : O.12a2r+t2.*
| *O.4a3+2t3 : O.12a2r+2t2.*
| *O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.* Quod &c.

---

3. *O.6a4+t4+t : O.24a3r+4t3.*

Demonstr.

5. b. | *O.30a4 : 6t5 — 15t4+10t3 — t.*
| *O.30a4+15t4 — 10t3+t : 6t5.*
5. b. | *O.60a3r : 3t5 — 5t3+2t.*
| *O.60a3r+5t3 — 2t : 3t5.*

O.120a3r

5.b. | $0.120a3r+10t3-4t:6t5.$
| $0.30a4+15t4-10t3+t:0.120a3r+10t3-4t.$
| $0.30a4+15t4+5t:0.120a3r+20t3.$
| $0.6a4+3t4+t:0.24a3r+4t3.$ Quod &c.

---

4. $0.12a3r+t3:0.18a2r2+t.$

Demonstr.

5.b. | $0.60a3r:3t5-5t3+2t.$
| $0.60a3r+5t3-2t:3t5.$
5.b. | $0.30a2r2:t5-t.$
| $0.30a2r2+t:t5.$
| $0.90a2r2+3t:3t5.$
| $0.60a3r+5t3-2t:0.90a2r2+3t.$
| $0.60a3r+5t3:0.90a2r2+5t.$
| $0.12a3r+t3:0.18a2r2+t.$ Quod, &c.

5. $0.6a5+3t5+2t2:0.30a4r+5t4.$
6. $0.12a4r+t4:0.24a3r2+t2.$
7. $0.6a6+3t6+4t3:0.36a5r+6t5+t.$
8. $0.12a5r+t5+t:0.30a4r2+2t3.$
9. $0.18a4r2+t3:0.24a3r3+t.$
10. $0.6a7+3t7+7t4:0.42a6r+7t6+3t2.$
11. $0.12a6r+t6+2t2:0.36a5r2+3t4.$
12. $0.18a5r2+t4:0.30a4r3+t2.$
13. $0.30a8+15t8+56t5+9t:0.80a7r+40t7+40t3.$
14. $0.60a7r+5t9+25t3:0.210a6r2+21t5+9t.$
15. $0.30a6r2+2t5+3t:0.60a5r3+5t3.$

16. O.

16. *O.120a5r3+10t3 : O.150a4r4+t5+9t.*

17. *O.10a9+5t9+28t6+12t2:O.90a8r+15t8+30t4.*

18. *O.60a8r+5t8+50t4:O.240a7r2+28t6+27t2.*

19. *O.90a7r2+7t6+18t2:O.210a6r3+25t4.*

20. *O.120a6r3+10t4:O.180a5r4+t6+9t2.*

21. *O.6a10+3t10+24t7+24t3:* O.*60a9r+10t9 +36t5+5t.*

22. O.*60a9r+5t9+90t5+25t: O.270a8r2+36t7 +84t3.*

23. *O.90a8r2+8t7+57t3 :O.240a7r3+40t5+25t.*

24. *O.120a7r3+15t5+25t:O.210a6r4+t7+39t3.*

25. *O.30a6r4+6t3:O.36a5r5+t5+5t.*

Et alia huiusmodi proponi possunt innumerabilia: quibus in singulis demonstrari poterit, quæ, & qualiter acceptæ totæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

---

*Theor.*10.*Prop.*10.

DEmonstrare, quæ, & qualiter acceptæ semitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Pro innumerabilibus theorematis huius tituli, vigintiquinque proponimus, & vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. *O.2a2+m2+m:O.4ar.*

Demonstr.

6. h. $0.6a2 : 2m3+3m2+m.$

$0.6a2-3m2-m : 2m3.$

6. h. $0.6ar : m3+3m2+2m.$

$0.12ar : 2m3+6m2+4m.$

$0.12ar-6m2-4m : 2m3.$

$0.6a2-3m2-m : 0.12ar-6m2-4m.$

$0.6a2 : 0.12ar-3m2-3m.$

$0.2a2 : 0.4ar-m2-m.$

$0.2a2+m2+m : 0.4ar$ Quod &c.

2. $0.2a3+m3+2m2+m : 0.6a2r.$

3. $0.6a4+3m4+8m3+6m2+m : 0.24a3r.$

4. $0.12a3r+m3+3m2+2m : 0.18a2r2.$

5. $0.6a5+3m5+10m4+10m3+2m2 : 0.30a4r+m.$

6. $0.12a4r+m4+4m3+5m2+3m : 0.24a3r2.$

7. $0.6a6+3m6+12m5+15m4+4m3 : 0.36a5r+$

$3m2+m.$

8. $0.12a5r+m5+5m4+8m3+4m2 : 0.30a4r2.$

9. $0.18a4r2+m3+3m2+2m : 0.24a3r3.$

10. $0.6a7+3m7+14m6+21m5+7m4+m : 0.42a6r$

$+7m3+3m2.$

11. $0.12a5r+m6+6m5+12m4+8m3 : 0.36a5r2+m2$

$+2m.$

12. $0.18a5r2+m4+4m3+5m2+2m : 0.30a4r3.$

13. $0.30a8+15m8+80m7+140m6+56m5+$

$20m2+9m : 0.240a7r+70m4+40m3.$

14. $0.60a7r+5m7+35m6+84m5+70m4 :$

$0.210a6m$

0.210a6m + 10m3 + 30m2 + 4m.

15. 0.30a6r2 + 2m5 + 10m4 + 15m3 + 5m2 : 0.60a7r3
+ 2m.

16. 0.120a5r3 + 20m2 + 16m : 0.150a4r4 + m5
+ 5m4.

17. 0.10a9 + 5m9 + 30m8 + 60m7 + 28m6 + 20m3
+ 12m2 : 0.90a8r + 42m5 + 30m4 + 3m.

18. 0.60a8r + 5m8 + 40m7 + 112m6 + 112m5 +
18m : 0.240a7r2 + 20m4 + 80m3 + 7m2.

19. 0.90a7r2 + 7m6 + 42m5 + 80m4 + 40m3 :
0.210a6r3 + 27m2 + 22m.

20. 0.120a6r3 + 20m3 + 36m2 + 16m : 0.180a5r4
+ m6 + 6m5 + 5m4.

21. 0.6a10 + 3m10 + 20m9 + 45m8 + 24m7 + 30m4
+ 24m3 : 0.60a9r + 42m6 + 36m5 + 9m2 + 5m.

22. 0.60a9r + 5m9 + 45m8 + 144m7 + 168m6 + 72m2
+ 16m : 0.270a8r2 + 36m5 + 180m4 + 24m3.

23. 0.90a8r2 + 8m7 + 56m6 + 128m5 + 80m4 + 2m :
0.240a7r3 + 63m3 + 61m2.

24. 0.120a7r3 + 40m4 + 76m3 + 12m2 : 0.210a6r4
+ m7 + 7m6 + 6m5 + 24m.

25. 0.30a6r4 + 8m2 + 8m : 0.36a5r5 + m5 + 5m4
+ 4m3.

Et omninò in qualibet basi speciosæ tabulæ, proponi, & demonstrari potest, quæ, & qualiter acceptæ semitotę, species vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Ther. 11. Prop. 11.

Demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ sesquitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc titulo vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. $O.2a2+q2+2 : O.3ar+3q.$

Demonstr.

7. h. | $O.6a2 : 2q3 - 9q2+13q-6.$
| $O.6a2+3q2+6 : 2q3-6q2+13q.$
7. h. | $O.6ar : q3-3q2+2q.$
| $O.12ar : 2q3-6q2+4q.$
| $O.12ar+9q : 2q3-6q2+13q.$
| $O.6a2+3q2+6 : O.12ar+9q.$
| $O.2a2+q2+2 : O.4ar+3q.$ Quod &c.

2. $O.2a3+q3+5q : O.6a2r+4q2+2.$

3. $O.6a4+3q4+30q2+6 : O.24a3r+16q3+23q.$

4. $O.12a3r+q3+2q : O.18a2r2+3q2.$

5. $O.6a5+3q5+50q3+31q : O.30a4r+20q4+58q2+6.$

6. $O.12a4r+q4+5q2 : O.24a3r2+4q3+2q.$

7. $O.6a6+3q6+75q4+93q2+6 : O.36a5r+24q5+116q3+37q.$

8. $O.12a5r+q5+8q3 : O.30a4r2+5q4+4q2.$

9. $O.18a4r2+q3+2q : O.24a3r3+3q2.$

10. O.

10. 0.6a7 + 3q7 + 105q5 + 217q3 + 41q : 0.42a6r +28q6 + 203q4 + 129q2 + 6.

11. 0.12a6r + q6 + 12q4 + 2q : 0.36a5r2 + 6q5 + 8q3 + q2.

12. 0.18a5r2 + q4 + 5q2 : 0.30a4r3 + 4q3 + 2q.

13. 0.30a8 + 15q8 + 700q6 + 2170q4 + 820q2 + 30 : 0.240a7r + 160q7 + 1624q5 + 1720q3 + 231q.

14. 0.60a7r + 5q7 + 84q5 + 30q2 : 0.210a6r2 + 35q6 + 70q4 + 10q3 + 4q.

15. 0.90a6r2 + 6q5 + 45q3 : 0.180a5r3 + 30q4 + 15q2 + 6q.

16. 0.120a5r3 + 5q4 + 16q : 0.150a4r4 + q5 + 20q2.

17. 0.10a9 + 5q9 + 300q7 + 1302q5 + 820q3 + 93q : 0.90a8r + 60q8 + 812q6 + 1290q4 + 348q2 + 10.

18. 0.60a8r + 5q8 + 112q6 + 80q3 : 0.240a7r2 + 40q7 + 112q5 + 20q4 + 7q2 + 18q.

19. 0.180a7r2 + 14q6 + 105q4 + 44q : 0.420a6r3 + 84q5 + 80q3 + 54q2.

20. 0.120a6r3 + 6q5 + 36q2 : 0.180a5r4 + q6 + 5q4 + 20q3 + 16q.

21. 0.6a10 + 3q10 + 225q8 + 1302q6 + 1230q4 + 279q2 + 6 : 0.60a9r + 40q9 + 696q7 + 1548q5.

22. 0.60a9r + 5q9 + 144q7 + 180q4 + 16q : 0.270a8r2 + 45q8 + 168q6 + 36q5 + 24q3 + 72q2.

23. 0.90a8r2 + 8q7 + 128q5 + 61q2 + 2q : 0.240a7r3 + 56q6 + 80q4 + 63q3.

24. 0.

24. *O.120a7r3+7q6+76q3 : O.210a6r4+q7+6q5+40q4+12q2+24q.*

25. *O.30a6r4+5q4+8q : O.36a5r5+q5+4q3+8q2.*

Possunt hæc, & alia huiusmodi, sub hoc titulo demonstrari, in infinitum, iuxta traditam methodum: vt omninò pateat, quæ, & qualiter acceptæ sesquitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas æquales faciant.

Theor. 12. Prop. 12.

Demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ primi lateris species, binas quasque species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc etiam titulo, vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. *O.a2+O.a : O.2ar.* Demonstratum est in 8. *h.*
2. *O.2a3+O.3a2+O.a : O.6a2r.* Demonstr. ibidem.
3. *O.a4+O.2a3+O.a2 : O.4a3r.* Demonstr. ibidem.
4. *O.4a3r+O.a2+O.a : O.6a2r2.*

Demonstr.

8. *h.* | *O.4a3r : O.a4+O.2a3+O.a2.*
| *O.4a3r+O.a2+O.a : O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.*
8. *h.* | *O.6a2r2 : O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.*
| *O.4a3r+O.a2+O.a : O.6a2r2.* Quod &c.

5. *O.6a5+O.15a4+O.10a3 : O.30a4r+O.a.*
6. *O.6a4r+O.2a3+O.3a2+O.a : O.12a3r2.*
7. *O.2a6+O.6a5+O.5a4 : O.12a5r+O.a2.*

8. O.

8. O.12a5r+O.5a4+O.10a3+O.4a2:O.30a4r2 +O.a.

9. O.30a4r2+O.8a5+O.5a2:O.40a3r3+O.3a.

10. O.6a7+O.21a6+O.21a5+O.a:O.42a6r +O.7a3.

11. O.12a6r+O.6a5+O.15a4+O.8a3:O.36a5r2 +O.3a2+O.2a.

12. O.9a5r2+O.2a3+O.3a2+O.a:O.15a4r3.

13. O.3a8+O.12a7+O.14a6+O.2a2:O.24a7r +O.7a4.

14. O.12a7r+O.7a6+O.21a5+O.14a4+O.a: O.42a6r2+O.7a3+O.6a2.

15. O.6a6r2+O.2a4+O.4a3+O.a2:O.12a5r3 +O.a.

16. O.24a5r3+O.4a2+O.5a:O.30a4r4+O.a4 +O.2a3.

17. O.10a9+O.45a8+O.60a7+O.20a3:O.90a8r +O.42a5+O.3a.

18. O.30a8r+O.20a7+O.70a6+O.56a5+O.10a2+ O.9a:O.120a7r2+O.35a4+O.40a3.

19. O.90a7r2+O.42a5+O.105a4+O.40a3: O.210a6r3+O.20a2+O.22a.

20. O.120a6r3+O.20a3+O.45a2+O.16a: O.180a5r4+O.6a5+O.15a4.

21. O.2a10+O.10a9+O.15a8+O.10a4:O.20a9r+ O.14a6+O.3a2.

22. O.20a9r+O.15a8+O.60a7+O.56a6+O.20a3 +O.24a2:

$+0.24a2 : 0.90a8r2 + 0.42a5 + 0.60a4 + 0.3a.$

23. $0.90a8r2 + 0.56a6 + 0.168a5 + 0.80a4 + 0.27a : 0.240a7r3 + 0.120a3 + 0.61a2.$

24. $0.120a7r3 + 0.40a4 + 0.115a3 + 0.12a2 : 0.210a6r4 + 0.7a6 + 0.21a5 + 0.49a.$

25. $0.30a6r4 + 0.8a2 + 0.13a : 0.36a5r5 + 0.5a4 + 0.10a3.$

Et alia deinceps proponi possunt, & demonstrari: & vniuersaliter possibile est demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ primi lateris species, binas quasque species, in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Theor. 13. Prop. 13.

IN tabula subquadratrice cuiusque numeri, & in qualibet basi, subquadratrices, & æque ordinata tota, totam componunt, vnitate plus ordinatam.

Hypoth.

In tabula subquadratrice, in secunda basi, sint subquadratrices $0.a2, 0.2a3, 0.r2$: sitque tota secunda, $t2$; tota tertia, $t3$.

Dico $0.a2 + 0.2ar + 0r2 + t2 : t3.$

Demonstr.

def. 6. p.	$u; t : t2; t3.$
2. p.	$u; t - u : t2; t3 - t2.$

Ergo $t3 - t2$, est toties $t2$, quoties est $t - u$: idest, quoties relinquitur ipse numerus t, vnitate dempta. Sed cuiusque numeri tot sunt abscissiones, quotus ipse relinquitur,

quitur, vnitate dempta: nam binarij, vna tantùm est abscissio, qua vnitas abscinditur; ternarij, duæ, quibus vnitas, & binarius abscinduntur; & sic deinceps: ergo $t3 - t2$, est toties $t2$, quot sunt ipsius t abscissiones.

Pro singulis autem abscissionibus.

6. p. | $a2 + 2ar + r2 : t2$.
| Ergo pro omnibus.
| $O.a2 + O.2ar + O.r2 : t3 - t2$.
| Ergo communiter addendo $t2$.
| $O.a2 + O.2ar + O.r2 + t2 : t3$. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 14. *Prop.* 14.

Tota quælibet, est æqualis quadratrici, in primo latere, in basi proximè minùs ordinata iacenti, vnà cum alijs massis, in primo latere, in basibus inferioribus, & vertice, acceptis aliqualiter, & vnitate.

Hypoth.

Esto tota tertia $t3$.

Dico $t3$, esse æqualem quadratrici in primo latere, in secunda basi, vna cum alijs, &c.

Demonstr.

4. h. | $t3 : O.3a2$, vna cum alijs, &c.
def. 8. p. | $a2$ est in primo latere in secunda basi tabulæ proportionalium.
def. 11. p | $a2$ est ibidem in tabula nominum.
def. 9. 2. | $O.a2$ est ibidem in tabula speciosa.

def.11.2. | O.a2 est ibidem in tabula subquadratrice.
def.13.2 | O.3a2 est ibidem in tabula quadratrice.
| t3 est æqualis quadratrici, in primo latere, in secunda basi, vna cum alijs, &c. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 15. *Prop.* 15.

QVælibet subquadratrix, in primo latere, vna cum tota æque ordinata, atque sua basis, est æqualis subquadratrici, in secundo latere, in sua basi iacenti, vna cum massis, in secundo latere, in basibus inferioribus, acceptis aliqualiter, & tota.

Hypoth.

Esto subquadratrix *O.a3*, in primo latere, in tertia basi. Dico *O.a3*, vnà cum tota tertia, æqualem esse subquadratrici, in secundo latere, in tertia basi iacenti, vna cum alijs, &c.

Præpar.

Assumatur species, in secundo latere, in quarta basi, secunda, & quartultima, *O.a3r*.

Demonstr.

| *O.a3r* incrementa sunt ęqualia.
2. h. | *O.a3*, vna cum &c: *O.3a2r*, vna cum alijs &c.
7. p. | *a2r* est secunda in tertia basi tabulæ proportionalium.
def.11.p. | *3a2r* est ibidem in tabula nominum.
def.11.2. | *O.3a2r* est ibidem in tabula subquadratrice.

O.a3,

| O.a3, vna &c. eſt æqualis ſubquadratrici, in ſecundo latere, in tertia baſi, vna cum alijs, &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

SI aliquot quantitatum, ſecunda ad tertiam, fuerit ſicut prima cum vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia ad quartam, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & quarta ad quintam ſicut prima cum tripla vltima ad ſecundam dempta tripla vltima; & ſic deinceps vſque ad vltimam: erit prima cum ſecunda ad ſecundam cum tertia, ſicut prima cum vltima ad ſecundam; & ſecunda cum tertia ad tertiam cum quarta, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia cum quarta ad quartam cum quinta, ſicut prima cum tripla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & ſic deinceps.

Hypoth.

Sint aliquot quantitates a, b, c, d, e.

$b;c:a+e;b-e.$

$c;d:a+2e;b-2e.$

$d;e:a+3e;b-3e.$

Dico $a+b;\ b+c:\ a+e;\ b.$

Demonſtr.

hypoth. | $a+e;\ b-e:\ b;\ c.$

| conuertendo, componendo, & permutando.

2. p. | $a+b; b+c: a+e; b$. Quod &c.

Dico $b+c; c+d: a+2e; b-e$.

Demonstr.

hypoth. | $b; c: a+e; b-e$.
2. p. | $b+c; c: a+b; b-e$.
hypoth. | $c; d: a+2e; b-2e$.
2. p. | $c; c+d: a+2e; a+b$.
p. p. | $b+c; c+d: a+2e; b-2e$. Quod &c.

Dico $c+d; d+e: a+3e; b-2e$.

Demonstr.

hypoth. | $c; d: a+2e; b-2e$.
2. p. | $c+d; d: a+b; b-2e$.
hypoth. | $d; e: a+3e; b-3e$.
2. p. | $d; d+e: a+3e; a+b$.
p. p. | $c+d; d+e: a+3e; b-2e$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 17. *Prop.* 17.

SI aliquot quantitatum, ſecunda ad tertiam fuerit, ſicut prima cum vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia ad quartam, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & ſic deinceps vſque ad vltimam: fuerit autem & prima æqualis vltimæ: erunt totidem quantitates & vna amplius, prima ſeorſim, prima cum ſecunda, ſecunda cum tertia, tertia cum quarta, & deinceps binę aggregatæ, & demum ſeorſim vltima; quarum ſecunda ad tertiam, eſt vt prima cum vltima ad ſecundam dempta

dempta vltima; & tertia ad quartam, vt prima cum dupla vltima ad secundam dempta dupla vltima; & sic deinceps vsque ad vltimam.

Hypoth.

Sint tres quantitates a, b, c, quarum
$b ; c : a + c ; b - c$.
$a : c$.

Dico quatuor quantitates esse $a, a + b, b + c, c$, quarum
$a + b ; b + c : a + c ; a + b - c$.

Demonstr.

16.b.	$a + b ; b + c : a + c ; b$.
hypoth.	$a : c$.
	$a + b - c : b$.
	$a + b ; b + c : a + c ; a + b - c$. Quod &c.

Dico $b + c ; c : a + 2c ; a + b - 2c$.

hypoth.	$b ; c : a + c ; b - c$.
2.p.	$b + c ; c : a + b ; b - c$.
hypoth.	$b + c : a + b$.
	$c : b - c$.
	$2c : b$.
	$a + 2c : a + b$.
	$a + b - 2c : b - c$.
	$b + c ; c : a + 2c ; a + b - 2c$. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 18. Prop. 18.

IN vnaquaque basi tabulæ multiplicium, prior quantitas ad posteriorem vicinam, est vt ordo prioris à prima, ad ordinem posterioris ab vltima.

Demonstr.

Quoniam in secunda basi tabulæ multiplicium, sunt tres quantitates, quarum secunda ad tertiam, est vt prima cum tertia ad secundam dempta tertia; & prima est æqualis tertiæ; & in tertia basi, sunt ordinatæ quatuor quantitates ex secunda basi desumptæ, prima seorsim, prima & secunda, secunda & tertia, & tertia seorsim: ergo etiam in tertia basi, secunda quātitas ad tertiam, est vt prima cum quarta ad secundam dempta quarta; & tertia ad quartam, est vt prima cum dupla quarta, ad secundam dempta dupla quarta: & sic deinceps ostendetur in singulis basibus.

def. 9. p · 17. h.

Est autem in vnaquaque basi tabulæ multiplicium, prima quantitas vnitas, & vltima vnitas: & secunda quantitas est ordo basis, idemque ordo ipsius quantitatis ab vltima. Ergo in quarta basi, prima quantitas, quæ est quintultima, ad secūdam, quæ est quartultima, est vt vnitas ad quaternariū: secunda ergo ad triultimam, est vt binarius ad ternarium; tertia ad penultimam, vt ternarius ad binarium; quarta ad vltimam, vt quaternarius ad vnitatem. Similiter ostendetur in singulis basibus.

def. 10. p · def. p. p.

Quare &c. *Theor.*

Theor. 19. Prop. 19.

PRoportionalium, & multiplicium tabulis congruentibus, quæque proportionalis, habet numeros denominatores, reciprocè proportionales, vt in ſuis cornibus multiplices.

Demonſtr.

Proportionalium aſſumatur bitertia, cuius denomina-
7. p. tores binarius, & ternarius. Eſt autem bitertia in quinta baſi quarta tritultima: cuius cornua ſunt in
def. p. p. quarta baſi, alterum in quarto, alterum in tritultimo latere: ideſt alterum cornu eſt, in quarta baſi,
def. p. p. quarta quantitas; alterum, tritultima. Sed in quarta baſi, quarta eſt penultima, & tritultima eſt ter-
18. b. tia: & in tabula multiplicium, tertia ad penultimã, eſt vt ternarius ad binarium: ergo cum bitertiæ denominatores ſint, prior binarius, & poſterior ternarius; eiuſdem in cornibus multiplices reciprocè ſunt proportionales, prior ad poſteriorem, vt ternarius ad binarium. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. Prop. 20.

IN tabula ſpecierum, in eadem baſi, vicinæ ſpecies, multiplicatæ per numeros ſuorum ordinum, prioris à prima, & pòſterioris ab vltima, ſunt æquales, additis tamen vtrimque maſſis, in inferioris ordinis baſibus, & in earumdem

dem lateribus, versus tabulæ verticem diuergentibus, aliqualiter acceptis, atque totis minùs ordinatis, quàm sit ipsa basis.

Hypoth.

Sint species in quinta basi, secunda quintultima, & tertia quartultima.

Dico duplam secundam quintultimam, æqualem esse quadruplæ tertiæ quartultimæ, additis tamen vtrimque alijs &c.

Præpar.

6. p. Assumatur, in sexta basi, species tertia quintultima, cuius denominatores numeri, quaternarius, & binarius.

Demonstr.

Tertiæ & quintultimæ speciei æqualia sunt incrementa:
2. b. alterum ex massis compositum in tertio latere, multiplicatis per numeros quartæ basis multiplicium, quaternarium, & reliquos; quarum vna est in quinta basi quartultima, per quaternarium multiplicata:
2. b. alterum ex massis in quintultimo latere, multiplicatis per numeros secundæ basis multiplicium, nempè binarium; quarum vna est, in quinta basi, secunda, multiplicata per binarium: & reliquæ massæ, in vtroque incremento, sunt inferiores, & demum totæ inferiores, quàm quinta. Ergo dupla secunda quintultima, est æqualis quadru-

druplæ tertiæ quartultimæ, additis vtrimque alijs &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. Prop. 21.

IN tabula subquadraticum, in eadem basi, subquadratrices vicinæ sunt æquales, additis tamen vtrimque massis, in inferioris ordinis basibus, & in earumdem lateribus, versus tabulæ verticem diuergentibus, aliqualiter acceptis, atque totis, minùs ordinatis, quàm sit ipsa basis. Similiter & vicinæ quadratrices sunt æquales, additis tamen &c.

Hypoth.

Sint subquadratrices, in quinta basi, vicinæ, producta ex secunda quintultima specie per secundum quintultimum multiplicem, & producta ex tertia quartultima specie, per tertium quartultimum multiplicem, *O.544r*, & *O.1043r2*.

Dico *O.544r*; additis &c. *O.1043r2*, additis &c.

Præpar.

Assumatur, in sexta basi, species tertia quintultima, cuius denominatores, quaternarius, & binarius, nempè *O.44r2*: quibuscum numeris, reciprocè proportionales sunt multiplices, in eiusdem speciei cornibus iacentes, 5 ad 10. Fiat itaque, vt 2 ad 5, ita *O.244r*, vna cum alijs &c. ad *O.544r*, vna cum alijs &c. item vt 4 ad 10, ita *O.443r2*, vnà cum alijs &c. ad *O.1043r2*, vna cum alijs &c.

19. h.

post. vn.

Demonstr.

20.h. O.2a4r, vna cum alijs &c: O.4a3r2, vna cũ alijs &c.
2.p. O.2a4r, vna cum alijs &c; O. 4a3r2, vna cum &c:
O.5a4r, vna cum &c; O.10a3r2, vna cum &c.
9.5. O.5a4r, vna cum &c: O.10a3r2, vna cum &c.
Quod &c.

Dico O. 30a4r, vna cum &c: O. 60a3r2, vna cum &c.

Præpar.

post.vn. O. 5a4r, vna cum &c: & O.10 a3r2, vna cum &c. sextuplicetur, & fiant O30a4r, vna cum &c. & O.60a3r2, vna &c.

Demonstr.

sup. O.5a4r, vna &c: O.10a3r2, vna &c.
9.5. O 30a4r, vna &c: O.60a3r2, vna &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

QVælibet quadratrix, est æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm sit eius basis.

Demonstr.

Patet inductione per 5. h.

21.h. Deinde sic. Quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, sibi in eadem basi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum basium speciebus, aliqualiter acceptis, & totis. Et quadratrix vicina, alte-
21.h. ri vicinæ est æqualis, additis vtrimque alijs infe-

rio-

15. *b.* riorum basium speciebus, & totis: & demum pri-
14. *b.* mæ quadratrici eiusdem basis: & prima quadratrix vna cum alijs primi lateris quadratricibus inferiorum basium, & vnitate, est æqualis totæ, vni-
sup. tate plus ordinatæ, quàm sit ipsa basis. Similiter aliæ inferiorum basium species, alijs speciebus, & demum totis, sunt æquales, non plus ordinatis,
5. *b.* quàm sit basis quadratricis primò sumptæ. Quare demum quadratrix primò sumpta, est æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm sit eius basis.

Theor. 23. Prop. 23.

IN tabula multiplicium, summa numerorum cuiusque basis, est tota potestas binarij, quotus est ordo basis.

Demonstr.

Nam in tabula proportionalium, si rationalis, & radices
def. 8 *p.* fuerint æquales inter se: etiam reliquæ omnes quantitates, & rationali, & radicibus, & ad inuicem æquales erunt. quia ratio æqualitatis, quantumlibet multiplicata, & secum ipsa composita, semper est æqualitas. Quare si rationalis, & radices fuerint vnitates: omnes proportionales erunt
def. 11. *p.* vnitates. eritque tabula nominum, eadem, quæ
def. 10. *p.* tabula multiplicium: quia vnitas non multiplicat et cuiusque basis nominum summa, eadem erit

8. p. quæ summa eiusdem basis multiplicium. Sed cuiusque basis nominum summa est potestas aggregati radicum, æqueordinata cum basi. Ergo cuiusque basis multiplicium summa, est potestas aggregati vnitatum, idest binarij, æqueordinata cum basi.

Theor. 24. Prop. 24.

POtestas binarij multiplicata per suum ordinis numerum, minor est æqueordinata potestate ternarij.

Hypoth.

Esto binarius *b*, ternarius *t*. Constat *b*, minorem esse, quàm *t*.

Dico $2b2$, minorem esse, quàm $t2$.
$3b3$, minorem, quàm $t3$.
$4b4$, minorem quàm $t4$. Et deinceps.

Demonstr.

def.8. p. t; b: $t2$; tb: tb; $b2$: $t2 - tb$; $tb - b2$.
& 2. p. t, b, sunt numeri inter se primi.
23. 7. t, b, sunt minimi in sua ratione.
$t2 - tb$, non est minor, quàm t.
$tb - b2$, non est minor, quàm b.
$t2 - b2$, non est minor quàm $t + b$.
hypoth. b, est minor, quàm t.
$2b$, est minor, quàm $t + b$.
$2b$, est minor, quàm $t2 - b2$.
hypoth. 2, est b.

2b,

$2b$, est $b2$.
$b2$, est minor, quàm $t2 + b2$.
$2b2$, est minor, quàm $t2$. Quod &c.
$2b2$, est $b3$.
$b3$, est minor, quàm $t2$.
$3b3$, est minor, quàm $3t2$.
$3t2$, est $t3$.
$3b3$, est minor, quàm $t3$. Quod &c.
$3b4$, est minor, quàm $2t3$.
sup. $b3$, est minor, quàm $t2$.
hypoth. b, est minor, quàm t.
$b4$, est minor, quàm $t3$.
$4b4$, est minor, quàm $3t3$.
$3t3$, est $t4$.
$4b4$, est minor, quàm $t4$. Quod &c.
Et similiter deinceps ostendetur in infinitum.
Quare &c.

Theorema 25. Prop. 25.

IN tabula multiplicium; quisque numerus multiplicans numerum vnitate maiorem, quàm sit ordo suæ basis, facit numerum minorem tota potestate ternarij, quotus est numerus multiplicatus.

Hypoth.

Esto, numerus a, in tabula multiplicium, in quinta basi: & esto ternarius t.

Dico $6a$, minorem esse, quam $t6$.

Præpar.

Præpar.

Accipiatur binarius *b*.

Demonstr.

32. *b.* Numerus *a*, & alij quintæ basis, componunt *b5*. *def.6.p.* Ergo *a*, minor est, quàm *b5*. Sed *b5*, minor est, quàm *b6*. Ergo *a*, multò minor est, quàm 24. *b.* *b6*. Ergo *6a*, minor est quàm *6b6*. Sed *6b6*, minor est, quàm *16*. Ergo *6a*, minor est quàm *16*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. Prop. 26.

Quælibet quadratrix, pro radice binario, minor est, quàm sesquitota; maior, quàm semitota, vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis. Porrò quadratrix iacens in vertice tabulæ, est æqualis semitotæ.

Hypoth.

Esto, pro radice binario, quælibet quadratrix *a*, in quarta basi.

Dico *a* maiorem esse, quàm *m5*; & minorem, quàm *q5*.

6. *b.* Porrò constat quod *O.u*, pro quacunque radice, est æqualis ipsi *m*.

Præpar.

def.8.b. Pro radice binario, vnica tantum est abscissio, qua vnitas abscinditur, & vnitas relinquitur: & *def.8.p.* vnica tabula proportionaliũ, in qua omnes propor-

def.8.b. portionales sunt vnitates: & synonymæ propor-
def.10.b. tionales solitariæ; vnde tabula specierum est ea-
def.11.p. dem, quæ proportionalium ex vnitatibus. Dein-
def.11.b. de vnica est tabula nominum, eadem, quæ multi-
plicium; vnde tabula subquadratricum, eadem est, quæ nominum, & multiplicium. Accipiatur itaque subquadratrix *b*, in quarta basi, quadratrici *a*, synonyma.

Demonstr.

prapar. *b*, est in tabula multiplicium, in quarta basi.
def.13b. *a* : 5 *b*.
def.19.b. pro binario, *m*, est vnitas.
def.6.p. *m* 5; est vnitas.
def.10.p 5 *b*, est maior vnitate.
a, est maior, quàm *m* 5. Quod &c.
def.18.b Pro binario, *q*, est ternarius.
25.b. 5 *b*, est minor, quàm *q* 5.
a, est minor, quàm *q* 5. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Prop. 27.

QVælibet potestas à binario, maior est numero sui ordinis.

Hypoth.

Esto binarius *b*.

Demonstr.

Vnitas est minor, quàm *b*. ergo binarius, minor est,
quàm

quàm 2 b: sed 2b: est b2: ergo binarius, minor est, quã b2. Ergo vnitas, multò minor est, quàm b2. Ergo ternarius, minor est, quàm 2b2. Sed 2b2, est b3. Ergo ternarius, minor est, quàm b3. Et sic deinceps ostendetur, quòd potestas à binario, maior est, quàm sui ordinis numerus.

Theor. 28. *Prop.* 28.

QVælibet quadratrix primi lateris, pro radice binario, minor est, quàm potestas binarij, vnitate plus ordinata, quàm sit eius basis.

Hypoth.

Esto, in primo latere, in quarta basi, quadratrix a, pro radice binario: & esto binarius b.

Dico a, minorem esse, quàm b5.

Præpar.

Accipiatur in primo latere, in quarta basi, subquadratrix c, pro radice binario.

Demonstr.

ex 26. b	$c : a$.
def. 11. b	$a : 5c$.
	$a : 5$.
27. b.	5, minor est, quàm b5.
	a, minor est, quàm b5. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 29. Prop. 29.

CViuslibet quadratricis, primi vel vltimi lateris, incrementum, minus eſt incremento totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis: & quælibet quadratrix, primi vel vltimi lateris, minor eſt quàm tota, vnitate plus ordinata: & ſeſquiquadratrix, minor eſt quàm ſeſquitota.

Meth. Demonſtr.

Tria propoſita, oportet primùm demonſtrare, in prioribus baſibus tabulæ, deinde in poſterioribus.

Dico *O.2a* incrementum, minus eſſe incremento *t2*: & *O.2a*, minorem eſſe, quàm *t2*: & ſeſqui-*O.2a*, minorem eſſe, quàm *q2*.

Demonſtr.

2. *h.* | *O.2a* incrementum eſt *O.2+2*.
8. *p.* | *t2* incrementum eſt *2t+u*.
2. *h.* | *O.2* : *2t--2*.
| *O.2+2* : *2t*.
| *O.2+2*, minor eſt, quàm *2t+u*.
| *O.2a* incrementum, minus eſt incremento *t2*. Quod &c.
28. *h.* | *O.2a*, pro binario, minor eſt, quàm *t2*.
| *O.2a*, pro ternario, minor eſt, quàm *t2*.
| Similiter, pro quaternario, & pro ſingulis numeris demonſtrabitur, quòd *O.2a* minor eſt, quàm *t2*: & ſeſqui-*O.2a*, minor eſt, quàm *q2*. Quod &c.

Dico $O.3a2$ incrementum, minus esse incremento $t3$: & $O.3a2$, minorem esse, quàm $t3$: & sesqui-$O.3a2$, minorem esse, quàm $q3$.

Demonstr.

2.*b.* | $O.3a2$ incrementum, est $O.6a+O.3+3$.
8.*p.* | $t3$ incrementum, est $3t2+3t+u$.
sup. | $O.6a$, minor est, quàm $3t2$.
ex sup. | $O.3+3$, minor est, quàm $3t+u$.
| $O.3a2$ incrementum, minus est incremento $t3$. Quod &c.
28.*b.* | $O.3a2$, pro binario, minor est, quàm $t3$.
| $O.3a2$, pro ternario, minor est quàm $t3$: necnon pro alio quolibet numero: & sesqui-$O.3a2$, minor est, quàm $q3$. Quæ &c:

Dico $O.4a3$ incrementum, minus esse incremento $t4$: & $O.4a3$, minorem esse, quàm $t4$: & sesqui-$O.4a3$, minorem, quàm $q4$.

Demonstr.

2.*b.* | $O.12a2+O.12a$ $+O.4+4$: $O.4a3$ incrementum, est $O.12a2+O.12a+O.4+4$.
8.*p.* | Incrementum $t4$, est $4t3+6t2+4t+u$.
sup. | $O.12a2$, minor est, quàm $4t3$.
sup. | $O.12a$, minor est, quàm $6t2$.
ex sup. | $O.4+4$, minor est, quàm $4t+u$.
| Incrementum $O.4a3$, minus est incremento $t4$. Quod &c.
28.*b.* | $O.4a3$, pro binario, minor est, quàm $t4$.

$O.4a3$,

$O.4a3$, pro ternario, minor eſt, quàm $t4$: necnon pro quaternario, & pro alijs deinceps numeris: & ſeſqui- $O.4a3$, minor eſt, quàm $q4$. Quæ &c.

Similiter oſtendetur de omnibus primi, & vltimi lateris quadratricibus.

Quare &c.

Theor. 30. *Prop.* 30.

CViuslibet quadratricis incrementum, maius eſt incremento ſemitotæ, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis; & minus eſt incremento ſeſquitotæ, pariter plus ordinatæ. Deinde quælibet quadratrix, maior eſt, quàm prædicta ſemitota; & minor, quàm prædicta ſeſquitota.

Meth. Demonſtr.

Quatuor propoſita primùm demonſtrare oportet, in prioribus baſibus tabulæ, deinde in poſterioribus.

Dico incrementum $O.2a$; maius eſſe, incremento $m2$; & minus eſſe, incremento $q2$: & $O.2a$, maiorem eſſe, quàm $m2$; minorem, quàm $q2$.

Demonſtr.

2. *b.* | Incrementum $O.2a$, eſt $O2+2$.
8. *p.* | Incrementum $m2$, eſt $2m+u$.
8. *p.* | Incrementum $q2$, eſt $2q+u$.
7. *b.* | $O.2$: $2m$.
| $O.2+2$, eſt maior, quàm $2m+u$.
| Incrementum $O.2a$, eſt maius incremento $m2$.

Quod &c.

def. 19. & 18. h. | $O.2+2 : 2m+2 : 2t$.
$O.2+2$, est minor, quàm $2q$.
$O.2+2$, est minor, quàm $2q+u$.
Incrementum $O.2a$, est minus incremento $q2$. Quod &c.

26. h. | $O.2a$, pro binario, est maior, quàm $m2$; minor, quàm $q2$.
$O.2a$, pro ternario, est maior, quàm $m2$; minor, quàm $q2$: item pro quaternario, & pro reliquis numeris. Quod &c.

Dico $O3a2$ incrementum, maius esse incremento $m3$; minus incremento $q3$: & $O.3a2$, maiorem esse, quàm $m3$; minorem, quàm $q3$.

Demonstr.

6. h. | Incrementum $O.3a2$, est $O.6a+O.3+3$.
8. p. | Incrementum $m3$, est $3m2+3m+u$.
8. p. | Incrementum $q3$, est $3q2+3q+u$.
sup. | $O6a$, est maior, quàm $3m2$.
sup. | $O.3 : 3m$.
$O.3+3$, maior est. quàm $3m+u$.
Incrementum $O.3a2$, est maius incremento $m3$. Quod &c.

sup. | $O.6a$, est minor, quàm $3q2$.
sup. | $O.3+3$, est minor, quàm $3q+u$.
Incrementum $O.3a2$, est minus incremento $q3$. Quod &c.

26. h. | $O.3a2$, pro binario, est maior, quàm $m3$; minor, quàm $q3$.

$O.3a2$,

O.3a2, pro ternario, eſt maior, quàm *m3*; minor; quàm *q3*: necnon pro quaternario, & reliquis deinceps numeris. Quod &c.

Dico *O.6ar* incrementum, maius eſſe incremento *m3*; minus incremento *q3*: & *O.6ar*, maiorem eſſe, quàm *m3*; minorem, quàm *q3*.

Demonſtr.

2. *h.*	Incrementum O*6ar*, eſt O.*6r+6t*.
8. *p.*	Incrementum *m3*, eſt *3m2+3m+u*.
8. *p.*	Incrementum *q3*, eſt *3q2+3q+u*.
	O.*6r*, maior eſt, quàm *3m2*.
	6t, maior eſt, quàm *3m+u*.
	Incrementum O.*6ar*, maius eſt incremento *m3*. Quod &c.
29.*h.*	O*2r+2t*, minor eſt, quàm *q2*.
	O*6r+6t*, minor eſt, quàm *3q2+3q+u*.
	Incrementum O.*6ar*, minus eſt incremento *q3*. Quod &c.
26.*h.*	O.*6ar*, pro binario, eſt maior, quàm *m3*; minor, quàm *q3*.
	O.*6ar*, pro ternario, & pro reliquis numeris, eſt maior, quàm *m3*, minor, quàm *q3*. Quod &c.

Dico *O.4a3* incrementum, maius eſſe incremẽto *m4*; minus incremento *q4*: & *O.4a3*, maiorem eſſe, quàm *m4*; minorem, quàm *q4*.

De-

Demonstr.

2.h. | Incrementũ $O.4a3$, est $O.12a2 + O.12a + O.4 + 4$.
8.p. | Incrementum $m4$, est $4m3 + 6m2 + 4m + u$.
8.p. | Incrementum $q4$, est $4q3 + 6q2 + 4q + u$.
sup. | $O.12a2$, maior est, quàm $4m3$.
sup. | $O.12a$, maior, quàm $6m2$.
sup. | $O.4 : 4m$.
| 4 maior, quàm u.
| Incrementum $O.4a3$, maius incremento $m4$. Quod &c.
sup. | $O.12a2$, minor est, quàm $4q3$.
sup. | $O.12a$, minor, quàm $6q2$.
sup. | $O.4+4 : 4m+4 : 4t$.
| $O.4+4$, minor est, quàm $4q+u$.
| Incrementum $O.4a3$, minus incremento $q4$. Quod &c.
26.h. | $O.4a3$, pro binario, maior est, quàm $m4$; minor, quàm $q4$.
| $O.4a3$, pro ternario, & pro alio quolibet numero, maior est, quàm $m4$; minor quã $q4$. Quod &c.

Dico $O.12a2r$ incrementum, maius esse incremento $m4$; minus incremento $q4$: & $O.12a2r$, maiorem esse, quàm $m4$; minorem, quàm $q4$.

Demonstr.

2.h. | Incrementum $O.12a2r$, est $O.24ar + O.12r + 12r$.
8.p. | Incrementum $m4$, est $4m3 + 6m2 + 4m + u$.

In-

8.p. | Incrementum $q4$, est $4q3+6q2+4q+u$.
sup. | $O.24ar$, maior est, quàm $4m3$.
sup. | $O.12r$, maior, quàm $6m2$.
| $12t$, maior, quàm $4m+u$.
| Incrementum $O.12a2r$, maius est incremẽto $m4$. Quod &c.
sup. | $O.24ar$, minor est, quàm $4q3$.
29.b. | $O.12r+12t$, minor, quàm $6q2+4q+u$.
| Incrementum $O.12a2r$, minus incremento $q4$. Quod &c.
26.b. | $O.12a2r$, pro binario, maior, quàm $m4$; minor est, quàm $q4$.
| $O.12a2r$, pro ternario, maior est, quàm $m4$; minor, quàm $q4$, necnon quo alio quolibet numero. Quod &c.

Dico $O.5a4$, incrementum, maius esse incremẽto $m5$; minus incremento $q5$: & $O.5a4$, maiorem esse, quàm $m5$; minorem, quàm $q5$.

Demonstr.

2.b. | Incrementum $O.5a4$, est $O.20a3+O.30a2+O.20a+O.5+5$.
8.p. | Incrementum $m5$, est $5m4+10m3+10m2+5m+u$.
8.p. | Incrementum $q5$, est $5q4+10q3+10q2+5q+u$.
sup. | $O.20a3$, maior est, quàm $5m4$.
sup. | $O.30a2$ maior est, quàm $10m3$.
sup. | $O.20a$, maior est, quàm $10m2$.

sup. | $O.5+5$, maior est, quàm $5m+u$.
Incrementum $O.5a4$, maius est incremento $m5$. Quod &c.
sup. | $O.20a3$, minor est, quàm $5q4$.
sup. | $O.30a^2$, minor est, quàm $10q3$.
sup. | $O.20a$, minor est, quàm $10q^2$.
sup. | $O.5+5$ minor est, quàm $5q+u$.
Incrementum $O.5a4$, minus est incremento $q5$. Quod &c.
26.h. | $O.5a4$, pro binario, maior est, quàm $m5$; minor, quàm $q5$.
$O.5a4$, pro ternario, & reliquis numeris, maior est, quàm $m5$; minor, quàm $q5$. Quod &c.

Dico $O.20a3r$, incrementum, maius esse incremento $m5$; minus incremento $q5$: & $O.20a3r$, maiorem esse, quàm $m5$; minorem, quàm $q5$.

Demonstr.

2.h. | $O.20a3r$ incrementum, est $O.60a2r+O.60ar+O.2or+2ot$.
8.p. | Incrementum $m5$, est $5m4+10m3+10m2+5m+u$.
8.p. | Incrementum $q5$, est $5q4+10q3+10q2+5q+u$.
sup. | $O.60a2r$, maior est, quàm $5m4$.
sup. | $O.60ar$, maior est, quàm $10m3$.
sup. | $O.2or$, maior est, quàm $10m2$.
$2ot$, maior est, quàm $5m+u$.
Incrementum $O.20a3r$, maius est incremento $m5$. Quod &c.

$O.60$

sup. | O.6oa2r, minor eſt, quàm 5q4.

sup. | O.6oar, minor eſt, quàm 10q3.

29. h. | O.2or+2ot, minor eſt, quàm 10q2+5q+u.

| Incrementum O.2oa3r, minus eſt incremento q5. Quod &c.

26. h. | O.2oa3r, pro binario, maior eſt, quàm m5; minor, quàm q5.

| O.2oa3r, pro ternario, & reliquis numeris, maior eſt, quàm m5; minor, quàm q5. Quod &c.

Dico O.3oa2r2 incrementum, maius eſſe incremento m5; minus incremento q5: & O.3oa2r2, maiorem eſſe, quàm m5; minorem, quàm q5.

Demonſtr.

2. h. | Incrementum O.3oa2r2, eſt O.6oar2+O.3or2+3ot2.

8. p. | Incrementum m5, eſt 5m4+10m3+10m2+5m+u.

8. p. | Incrementum q5, eſt 5q4+10q3+10q2+5q+u.

sup. | O.6oar2, maior eſt, quàm 5m4.

sup. | O.3or2, maior eſt, quàm 10m3.

| O.3ot2, maior eſt, quàm 10m2+5m+u.

| Incrementum O.3oa2r2, maius eſt incremento m5. Quod &c.

sup. | O.6oar2, minor eſt, quàm 5q4.

29. h. | O.3or2+3ot2, minor eſt, quàm 10q3.

| Incrementum O.3oa2r2, minus eſt incremento q5. Quod &c.

26. b. O.3 oa2r2, pro binario, maior eſt, quàm *m5*; minor, quàm *q5*.

O.3 o*a*2*r*2, pro ternario, alioue quolibet numero, maior eſt, quàm *m5*; minor, quàm *q5*. Quod &c.

Similiter oſtendetur de omnibus quadratricibus in infinitum, hac ſemper methodo ſeruata.

Quare &c.

Theor. 31. Prop. 31.

QVælibet quadratrix eſt ęqualis ſemitotæ vnitate plus ordinatæ, additis, demptiſque ſemitotis, aliqualiter acceptis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Demonſtr.

Patet inductione per *6.h.*

22. b. Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſq; aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm

6. b. ſit eius baſis. Tota verò vnitate plus ordinata, eſt æqualis ſemitotæ pariter ordinatæ, vnà cum ſemitotis non plus ordinatis, aliqualiter acceptis, & vnitate: & reliquæ totæ non plus ordinatæ, ſunt æquales ſemitotis, non plus ordinatis, aliqualiter acceptis, & vnitati.

Quare quælibet quadratrix eſt æqualis ſemitotæ vnitate plus ordinatæ additis &c.

Theor.

Theor. 32. Prop. 32.

QVælibet quadratrix est æqualis ſeſquitotæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque ſeſquitotis, aliqualiter acceptis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Demonſtr.

Patet inductione per 7.*h*.

22. *h*. Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quã

7. *h*. ſit eius baſis. Tota verò, vnitate plus ordinata, æqualis eſt ſeſquitotæ, pariter ordinatæ, demptis, additiſque alijs, acceptis aliqualiter ſeſquitotis non plus ordinatis: & reliquæ totæ non plus ordinatæ, ſunt ſeſquitotis additis, & ſubtractis, non plus ordinatis æquales. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis ſeſquitotæ vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque alijs, acceptis aliqualiter ſeſquitotis, non plus ordinatis, quam ſit eius baſis.

Theor. 33. Prop. 33.

QVælibet quadratrix media, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, primæ, vna cum alijs primi lateris ſpeciebus, aliqualiter acceptis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Demonſtr.

Patet inductione per 8.*h*.

12. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis, demptis, additiſue alijs totis, aliqualiter acceptis,
14. *h.* non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis. Tota autẽ vnitate plus ordinata, eſt æqualis quadratrici primæ, in æqueordinata baſi iacenti, vna cum alijs ſpeciebus, in primo latere, in inferioribus baſibus, aliqualiter acceptis. Et reliquæ inferiores totæ, ſimiliter inferioribus quadratricibus, & ſpeciebus ſunt æquales, aliqualiter acceptis. Quare quælibet quadratrix media, eſt æqualis primæ, in eadem baſi, iacenti quadratrici, vnà cum alijs primi late-
2. *p.* ris ſpeciebus, aliqualiter acceptis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Theor. 34. *Prop.* 34.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, vicinæ, additis vtrinque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici. *Demonſtr.*

Patet inductione per 9.*h.*

21. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum baſiũ ſpeciebus, aliqualiter acceptis, & totis non plus ordinatis, quàm ſit
22. *h.* ipſa baſis. Sunt autem aliæ inferiorum baſium ſpecies, æquales totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa

ipſa baſis, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinę additis vtrimq; totis, nõ plus ordinatis quã
2. p. ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix ſubquadratrici.

Theorema 35. Prop. 35.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque ſemitotis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Demonſtr.

Patet inductione per 10. *h.*

34. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix eſt æqualis quadratrici, in eadẽ baſi, ſibi vicinę, additis vtrimq;
6. *h.* totis non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Totæ autem non plus ordinatæ, ſemitotis non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, ſunt æquales. Ergo quælibet quadratrix eſt æqualis quadratrici in eadem baſi ſibi vicinæ, additis vtrimque ſemitotis,
2. *p.* non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Theor. 36. Prop. 36.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque ſeſquitotis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

De-

Demonſtr.

Patet inductione per 11.*h*.

34. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa

7. *h.* baſis. Totæ autem, non plus ordinatæ, ſeſquitotis, non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, ſunt æquales. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadē baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis.

2. *p.* Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Theor. 37. *Prop.* 37.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, ſibi, in eadem baſi, vicinæ, additis vtrimque primi lateris ſpeciebus, inferiorum baſium. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici. *Demonſtr.*

Patet inductione per 12.*h*.

34. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, ſibi, in eadē baſi vicinę, additis vtrimq; totis, nō plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis, aliqua-

14. *h.* liter acceptis. quæ totę, ſunt æquales ſpeciebus inferiorū baſium, primi lateris, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici ſibi in eadem baſi vicinæ, additis vtrimq; primi la-

2. *p.* teris ſpeciebus, inferiorum baſium. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Pe-

Petrus Mengolus, Illustrissimo D. Fabio Alamandino, Nobili Bononiensi, Domino suo maximè recolendo, beatè viuere.



E quasi proportionibus, inauditum hucusque Geometricum elementum, ad theoremata, cæteroqui difficillima, facili negotio soluenda, cum instituerim: ex ijs, qui meam scholam frequentarunt, præter te, Iuuenis Illustrissime, neminem habeo satis dispositum; qui rem subtilissimam valeat intelligere. Cumque verear, si forte possit intelligi, quod legendum omnibus propono; nisi priùs ipse oretenus, alicui eius doctrinæ satis capaci, meam sententiam explicuerim: apud te precator accessi; vt dignareris (licet vacationum tempore admodum necessario) ruralibus partim delicijs, partim negotijs quidquam detrahere; priuatisque meis lucubrationibus auditor interuenire. Pro tua benignitate statim, quod postulabam, imple-

pleuisti: & concessum tibi diuinitus intellectum subtilissimum, inuentis meis, ea intentione adhibuisti; vt & me ipsum inuentorem, & prælectorem, in plurimis etiam præuenires. Plurimas itaque tibi primùm gratias profiteor: quod tàm humiliter, & liberaliter, me de studijs meis priuatis tecum patiaris communicare. Deinde illas easdem lucubrationes, vnà cum alijs præcedentium elementorum, pleniùs tractatas, prælegendas offero, scriptis præsentibus; antequam totum opus publici iuris esse incipiat: non quasi gratiam redditurus; sed in mei erga te obsequij monimentum.

Vale.

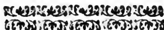


GEO-

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.



1. RAtio indeterminata determinabilis, quæ in determinari, poteſt eſſe maior, quam data, quælibet, quatenus ita determinabilis, dicetur Quaſi infinita.

2. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quaſi nulla.

3. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet maior inæqualitas; & maior, quàm data quælibet minor inæqualitas, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quaſi æqualitas. Vel aliter. quæ poteſt eſſe propior æqualitati, quàm data quælibet non æqualitas, quatenus talis, dicetur, Quaſi æqualitas.

4. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet maior, propoſitâ quadam ratione; & maior, quàm data quælibet minor, propoſitâ eâdem ratione, quatenus ita determina-

minabilis, dicetur, Quasi eadem ratio. Vel aliter. quæ potest esse propior cuidam propositæ rationi, quàm data quælibet alia non eadem, quatenus talis, dicetur, Quasi eadem.

5. Et rationum quasi earundem inter se, termini dicentur, Quasi proportionales.

6. Et quasi æqualitatum, dicentur, Quasi æquales.



Theor.

Theor. 1. Prop. 1.

INæqualium rationum maior, permutando, est maior: item componendo, & diuidendo, est maior.

Demonstr.

def. 8. 5. Maioris enim rationis antecedens, maior est, quàm proportionalis, cum reliquis terminis: & dempta quantitate, vt proportionalis relinquatur; 1. p. permutando, & componendo, & diuidendo, pro- 8. 5. portionalis erit, & antecedens: eademq restituta quantitate, erit antecedens maior, quàm proportionalis, permutatæ, aut compositæ, aut diuisæ proportionalitatis. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 2. Prop. 2.

INæqualium rationum maior, conuertendo, est minor.

Demonstr.

def. 8. 5. Nam maioris rationis consequens est minor, quàm proportionalis, cum reliquis terminis: factusque conuertendo antecedens, adhuc est minor, quàm proportionalis, cum reliquis terminis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

INæqualium rationum maior, per conuersionem rationis, est minor.

 Hy-

Hypoth.

a; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
a: maior, quàm *b*.
c: maior, quàm *d*.

Dico *a*; *a*—*b*: minorem esse, quàm *c*; *c*—*d*.

Demonst.

hyp.	*a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
p. h.	*a*—*b*; *b*: maior, quàm *c*—*d*; *d*.
2. h.	*b*; *a*—*b*: minor, quàm *d*; *c*—*d*.
p. h.	*a*; *a*—*b*: minor, quàm *c*; *c*—*d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop. 4.

EX maioribus rationibus, ex æquali, maior est ratio composita: & ex minoribus, minor.

Hypoth.

a; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
e; *f*: maior, quàm *g*; *h*.

Dico *a*; *b*,+*e*: *f*: maiorem esse, quàm *c*; *d*,+*g*; *h*.

Præpar.

a; *b*: *i*; *d*.
e; *f*: *d*; *l*.
g; *h*: *d*; *m*.

Demonstr.

constr.	*a*; *b*: *i*; *d*.
hypoth.	*a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
13. 5.	*i*; *d*: maior, quàm *c*; *d*.

i: ma-

10. 5.	i: maior, quàm c.
constr.	e; f: d; l.
hypoth.	e; f: maior, quàm g; h.
23. 5.	d; l: maior, quàm g; h.
constr.	g, h: d; m.
13. 5.	d; l: maior, quàm d; m.
10. 5.	l: minor, quàm m.
8. 5.	i: l: maior, quàm c; m.
p. p.	a; b,+e; f: i; d,+d; l: i; l.
p. p.	c; d,+g; h: c; d,+d; m: c; m.
	a; b,+e; f: maior, quàm c; d,+g; h. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

MAioris inæqualitatis plus multiplicata ratio, maior est, quàm minùs: & minoris, minor.

Hypoth.

	a: maior, quàm b.
3. *p.*	$a3$; $b3$: triplicata a; b.
3. *p.*	$a2$; $b2$: duplicata a; b.

Dico $a3$; $b3$: maiorem, quàm $a2$; $b2$.
Et $b3$; $a3$: minorem, quàm $b2$. $a2$.

Demonstr.

def. 6. p.	$a3$; $a2$: a; u.
def. 6. p.	$b3$; $b2$: b; u.
8. 5.	a; u: maior, quàm b; u.
13. 5.	$a3$; $a2$: maior, quàm $b3$; $b2$.

$a3$;

p. h.	$a3$; $b3$: maior, quàm $a2$; $b2$. Quod &c.
2. h.	$b3$; $a3$: minor, quàm $b2$; $a2$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 6. Prop. 6.

SI prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: etiam æqueproportionales cum prima, & tertia, ad æqueproportionales cum ſecunda, & quarta, maiorem habebunt rationem, ſi prout ſibi reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

a; b: maior, quàm c; d.
a; c: e; f.
b; d: g; h.

Dico e; g: maiorem eſſe, quàm f; h.

Demonſtr.

hypoth.	a; b: maior, quàm c; d.
p. h.	a; c: maior, quàm b; d.
13. 5.	e; f: maior, quàm g; h.
p. h.	e; g: maior, quàm f; h. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

RAtio quaſi infinita, conuertendo, eſt quaſi nulla.

Hypoth.

Eſto ratio A ad B, quaſi infinita.

Dico conuertendo, B ad A, eſſe quaſi nullam.

Pra-

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

def.1.h. Ratio *A* ad *B*, maior potest esse, quàm *d* ad *c*:
2. h. Ergo conuertendo, *B* ad *A*, minor potest esse, quàm *c* ad *d*. Ergo *B* ad *A*, est ratio quasi nulla.
def.2.h. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 8. *Propos.* 8.

Ratio quasi infinita, componendo, est quasi infinita: item diuidendo, est quasi infinita.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi infinita.

Dico componendo *A*+*B* ad *B*, esse quasi infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*: quod si *c*, est maior, quàm *d*; sit excessus *e*.

Demonstr.

Si quidem *c* est æqualis, vel minor, quàm *d*: patet, quod *A*+*B* ad *B*, maior potest esse, quàm *c* ad *d*. Quòd si *c* est maior, quàm *d*: quoniam *A* ad B, maior potest esse, quàm *e* ad *d*: ergo componendo, *A*+*B* ad *B*, maior potest esse, quàm *e*+*d* ad *d*: sed *e*+*d* est *c*: ergo *A*+*B* ad *B*, maior potest esse, quàm *c* ad *d*. Ergo *A*+*B* ad *B*, ratio est quasi infinita. Quod &c.

8. 5. def. 1. p. h. præpar. def. 1.

Dico

Dico diuidendo *A—B* ad *B*, rationem esse quasi infinitam.

Demonstr.

def. 1. | Ratio *A* ad *B*, potest esse maior, quàm *c+d* ad *d*:
p. b. | Ergo diuidendo *A—B* ad *B*, potest esse maior, quàm *c* ad *d*.
def. 1. | Ergo *A—B* ad *B*, ratio est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Pro. 9.

Ratio quasi infinita, per conuersionem rationis, est quasi æqualitas.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi infinita.

Dico, per conuersionem rationis, *A* ad *A—B*, esse quasi æqualitatem.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio non æqualitas, cuius maior terminus *c*, minor *d*.

Demonstr.

def. 1. b. | Ratio *A* ad *B*, potest maior esse, quàm *c* ad *c—d*:
3. b. | ergo, per conuersionem rationis, *A* ad *A—B*, potest minor esse, quàm *c* ad *d*: & est maior æqualitate: ergo *A* ad *A—B*, est propior
def. 3. b. | æqualitati, quàm sit proposita ratio *c* ad *d*: ergo ratio *A* ad *A—B*, est quasi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 10. *Prop.* 10.

Ratio quasi nulla, conuertendo, est quasi infinita.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi nulla.

Dico conuertendo, rationem *B* ad *A*, esse quasi infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

def.2.b. | Ratio *A* ad *B*, minor potest esse, quàm *d* ad
2. b. | *c*: ergo conuertendo, ratio *B* ad *A*, maior potest
def.1.b. | esse, quàm *c* ad *d*: ergo ratio *B* ad *A*, est quasi
| infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 11. *Prop.* 11.

Ratio quasi nulla, componendo, est quasi æqualitas.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi nulla.

Dico componendo, rationem *A+B* ad *B*, esse quasi æqualitatem.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*, non æqualitas; cuius maior terminus *c*, minor *d*.

Demonstr.

def.1.b. | Ratio *A* ad *B*, potest minor esse, quam *c—d*
2. b. | ad *d*: ergo conuertendo, *B* ad *A*, potest maior
p. b. | esse, quam *d* ad *c—d*: ergo componendo *A+B*

3. h. ad A, poteſt maior eſſe, quàm c ad $c - d$: ergo per conuerſionem rationis $A+B$ ad B poteſt minor eſſe, quàm c ad d: & eſt maior æqualitate: ergo $A+B$ ad B, eſt propior æqualitati, quàm c ad d:
def. 3. h. ergo $A+B$ ad B, eſt quaſi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 12. *Prop.* 12.

EX rationibus quaſi infinitis, ex æquali, quaſi infinitæ ſunt rationes compoſitæ.

Hypoth.

A ad B, & C ad D, ſunto rationes quaſi infinitæ.

Dico ex æquali, ex A ad B, & C ad D compoſitam, eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur e ad f. ratio quælibet.

Demonſtr.

Quoniam A ad B, & C ad D, ſunt rationes
def. 1. h. quaſi infinitæ: poſſunt eſſe A ad B, maior, quàm
4. h. e ad f; & C ad D, maior æqualitate. Quare & vtriſque A ad B, & C ad D, compoſita ratio, poteſt eſſe maior, quàm ex e ad f, & ex
7. 5. æqualitate, compoſita; ideſt, quàm ipſa e ad f
def. 1. h. ratio. Quare ex vtriſque A ad B, & C ad D, compoſita ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 13. Prop. 13.

EX rationibus quasi nullis, ex æquali, quasi nullæ sunt rationes compositæ.

Hypoth.

A ad *B*, & *C* ad *D*, sunto rationes quasi nullæ.

Dico ex æquali, ex *A* ad *B*, & *C* ad *D* rationem compositam, esse quasi nullam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *e* ad *f*.

Demonstr.

Quoniam *A* ad *B*, & *C* ad *D* sunt rationes
def.2.h. quasi nullæ, possunt esse, *A* ad *B*, minor, quàm *e* ad *f*: & *C* ad *D*, minor æqualitate. Quare
4. h. ex vtrisque *A* ad *B*, & *C* ad *D*, composita ratio, potest esse minor, quàm ex vtrisque *e* ad *f*,
7. 5. & ex æqualitate composita; idest, quàm ipsa *e* ad *f*. Quare ex vtrisque *A* ad *B*, & *C* ad *D*, com-
def.2.h. posita ratio est quasi nulla. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 14. Prop. 14.

RAtio quasi æqualitas, conuertendo, est quasi æqualitas.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi æqualitas.

Dico conuertendo, *B* ad *A*, quasi æqualitatem esse.

Præpar.

Assumantur duæ quælibet rationes, *c* ad *d*, maior æqualitate: & *e* ad *f*, minor.

Demonstr.

Quoniam ratio *c* ad *d*, est maior æqualitate;
2. *h.* ergo conuertendo, *d* ad *c*, est minor æqualitate:
1. *h.* & quoniam *e* ad *f*, est minor æqualitate; ergo
hypoth. conuertendo *f* ad *e*, est maior æqualitate. Et
def.3.h. quoniam *A* ad *B*, est quasi æqualitas: ergo potest *A* ad *B*, maior esse, quàm *d* ad *c*, & minor,
2. *h.* quàm *f* ad *e*: ergo conuertendo potest *B* ad *A*, minor esse, quàm *c* ad *d*, & maior, quàm *e* ad *f*.
def 3.h. Ergo *B* ad *A*, est quasi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 15. *Prop.* 15.

Ratio quasi æqualitas, componendo, est quasi dupla.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi æqualitas.

Dico componendo *A*+*B* ad *B*, esse quasi duplam.

Præpar.

Assumãtur duæ quælibet rationes *c* ad *d*, maior, quàm dupla: & *e* ad *f*, maior quidem æqualitate, sed minor, quàm dupla.

Demonstr.

constr. Quoniam *c* ad *d*, est maior, quàm dupla,
p. h. diuidendo, *c*—*d* ad *d*, est maior æqualitate: & quo-

constr. quoniam e ad f, est maior æqualitate, sed minor, quàm dupla; diuidēdo, $e-f$ ad f, est minor
p.h. æqualitate. Et quoniam A ad B, est quasi æqua-
def.3.h. litas; potest A ad B, minor esse, quàm $c-d$ ad
p.h. d; & maior, quàm $e-f$ ad f. Ergo componendo, potest $A+B$ ad B, minor esse, quàm c ad
def.4.h. d; & maior, quàm e ad f. Ergo $A+B$ ad B, est quasi dupla. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

Ratio quasi æqualitas, diuidendo, est quasi nulla.

Hypoth.

Esto ratio A ad B quasi æqualitas: & esto A maior, quàm B.

Dico diuidendo $A-B$ ad B, esse quasi nullam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio c ad d.

Demonstr.

hyp. Quoniam A ad B, est quasi æqualitas; & est A maior, quàm B; & $c+d$ maior, quàm d: ergo
def.3.h. potest A ad B ratio, minor esse, quàm $c+d$ ad
p.h. d: ergo diuidendo potest $A-B$ ad B ratio, mi-
def.3.h. nor esse, quàm c ad d: ergo $A-B$ ad B, ratio est quasi nulla. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 17. *Prop.* 17.

RAtio quasi æqualitas, per conuersionem rationis est quasi infinita.

Hypoth.

Esto ratio quasi æqualitas *A* ad *B*: & esto *A* maior, quàm *B*.

Dico, per conuersionem rationis, *A* ad *A*---*B*, rationem esse quasi infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio maioris inæqualitatis *c* ad *d*.

Demonstr.

hyp. | Quoniam *A* ad *B*, est quasi æqualitas; & est *A*
def.3.h. | maior, quàm *B*; item *c* maior, quàm *c*---*d*: er-
3.h. | go ratio *A* ad *B*, potest minor esse, quàm *c* ad
| *c*---*d*: ergo per conuersionem rationis, *A* ad
| *A*---*B* ratio, potest maior esse, quàm *c* ad *d*: &
| est maior omnibus, tùm æqualitatis, tùm minoris
def.p.h. | inæqualitatis rationibus: ergo *A* ad *A*---*B* ratio
| est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 18. *Prop.* 18.

QVæ eidem sunt quasi æqualia, inter se sunt quasi æqualia.

Hypoth.

Sunt *A*, *B*, quasi æqualia: item *B*, *C*, quasi æqualia.

Dico *A*, *C*, quasi æqualia esse.

Præ-

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *d* ad *e*, non æqualitas: cuius maior terminus *d*, minor *e*. & inter *d*, *e*, media sumatur *f*.

Demonstr.

def.3.h. Quoniam *A*, *B*, sunt quasi æqualia, potest *A* ad *B*, minus esse, quàm *d* ad *f*: & maius, quàm *f* ad *d*. Item *B* ad *C* potest minus esse, quàm *f* ad *e*, & maius, quàm *e* ad *f*. Ergo ex æquali, potest *A* ad *C* minus esse, quàm *d* ad *e*; & maius, quàm *e* ad *d*, ergo *A* ad *C*, quasi est æqualis. Quod &c.

4. b.

def.3.h.

Quare &c.

Theor. 19. Propos. 19.

QVæ eidem sunt quasi eędem rationes, inter se sunt quasi eędem.

Hypoth.

A ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* ad *D*: & *C* ad *D*, quasi eadem, quæ *E* ad *F*.

Dico *A* ad *B*, quasi eamdem esse quæ *E* ad *F*.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *g* ad *h*, maior, quàm cui propior potest esse *E* ad *F*: & quælibet *i* ad *l*, minor.

Demonstr.

def.4.h. Quoniam *C* ad *D*, quasi eadem est, quæ *E* ad *F*: potest *C* ad *D*, minor esse, quàm *g* ad *h*; & maior, quàm *i* ad *l*. Ergo *g* ad *h*, maior est, quàm

2. b.

quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*; & *i* ad *l*,
def.4.h. minor. Et quoniam *A* ad *B*, quaſi eſt eadem, quæ *C*. ad *D*: ergo *A* ad *B*, poteſt eſſe minor,
conſtr. quàm *g* ad *h*; & maior, quàm *i* ad *l*. Sed *g* ad *h* eſt quælibet aſſumpta, maior, quàm cui propior poteſt eſſe *E* ad *F*; & *i* ad *l*, eſt quælibet
def.4.h. aſſumpta, minor: ergo *A* ad *B*, eſt quaſi eadem, quæ *E* ad *F*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. *Prop.* 20.

QVaſi proportionales, conuertendo, ſunt quaſi proportionales.

Hypoth.

Sint quaſi proportionales *A* ad *B*, vt *C* ad *D*.

Dico conuertendo, quaſi proportionales eſſe *B* ad *A*, vt *D* ad *C*.

Præpar.

Sumatur quælibet *e* ad *f*, maior, quàm cui propior poteſt eſſe *D* ad *C*: & quælibet *g* ad *h*,
2. h. minor: & erit conuertendo, ſumpta *f* ad *e*, minor, quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*; & *h* ad *g*, maior.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam *A* ad *B*, quaſi eſt eadem, quæ *C*
def.4.h. ad *D*: ergo *A* ad *B*, poteſt eſſe minor, quàm *h*
2. h. ad *g*; & maior, quàm *f* ad *e*: ergo conuertendo,

def.4.h. do, *B* ad *A*, poteſt eſſe maior, quàm *g* ad *h*; & minor, quàm *e* ad *f*: ergo *B* ad *A*, quaſi eadem eſt, quæ *D* ad *C*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. Prop. 21.

EX quaſi ijſdem rationibus, ex æquali, quaſi eędem ſunt rationes compoſitæ.

Hypoth.

A	*B*		*C*	*D*
E	*F*		*G*	*H*
i	*n*	*r*	*p*	*k*
l	*o*	*s*	*q*	*m*

A ad *B*, quaſi eadem ratio eſt, quæ *C* ad *D*: & *E* ad *F*, quaſi eadem, quæ *G* ad *H*.

Dico ex æquali, ex *A* ad *B*, & *E* ad *F* compoſitam, quaſi eamdem eſſe, quæ ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita.

Præpar.

Aſſumatur *i* ad *k*, quælibet ratio maior, quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita: item aſſumatur quælibet *l* ad *m*, minor. Deinde fiant *i* ad *n*, & *l* ad *o*, ſicut cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*: item *p* ad *k*, & *q* ad *m*, ſicut cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*. Denique ſumatur inter *n*, *p*, media quælibet quantitas *r*: & inter *o*, *q*, media quælibet *s*.

Demonstr.

constr. Quoniam *i* ad *k*, maior est, quàm cui propior potest esse, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* composita; & est *i* ad *n*, cui propior potest esse *C* ad *D*, &
4. *h.* *p* ad *k*, cui propior potest esse *G* ad *H*: ergo *i* ad *k*, maior est, quàm, quæ ex *i* ad *n*, & ex *p* ad k, composita. Ergo *n*, maior est, quàm *p*. Si
p. h. enim *n*, esset æqualis ipsi *p*: ex *i* ad *n*, & ex æqualitate, & ex *p* ad *k*, cōposita ratio *i* ad *k*, esset eadem, quæ ex ea, cui propior potest esse *C* ad *D*, ex æqualitate, & ex ea, cui propior potest esse *G*
4. *h.* ad *H*, composita est; contra assumptum. Quod si *n*, essent minor, quàm *p*: ex *i* ad *n*, & minori inæqualitate, & *p* ad *k*, composita ratio *i* ad k, esset minor, quàm quæ ex ea, cui propior potest esse *C* ad *D*, ex æqualitate, & ex ea, cui propior potest esse *G* ad *H*, composita est; contra idem assumptum.

constr. Ergo *n*, maior est, quàm *p*: & *r*, minor, quàm
8. 5. *n*; & maior quàm *p*: habetque *i* ad *r*, maiorem rationem, quàm *i* ad *n*; idest maiorem, quàm,
8. 5. cui propior potest esse *C* ad *D*: habet quoque *r* ad k, maiorem, quàm *p* ad k; idest, maiorem, quàm, cui propior potest esse *G* ad *H*.

constr. Similiter, quoniam *l* ad *m*, minor est, quàm cui propior potest esse ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* composita: & est *l* ad *o*, eadem, cui propior po-
4. *h.* test esse *C* ad *D*: & *q* ad *m*, eadem, cui pro-

pior

A	*B*		*C*		*D*
E	*F*		*G*		*H*
i	*n*	*r*	*p*		*k*
l	*o*	*s*	*q*		*m*

4. b. pior poteſt eſſe *G* ad *H*: ergo *l* ad *m*, minor eſt, quàm quæ eſt ex *l* ad *o*, & *q* ad *m* compoſita. Ergo *o*, minor eſt, quàm *q*. demonſtrari enim poteſt vt ſupra, quod ſi *o*, eſſet æqualis, vel
p. b. maior, quàm *q*: eſſet *l* ad *m* ratio non minor,
4. b. quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita; contra aſſumptum.

conſtr. Cum itaque *o*, ſit minor, quàm *q*: erit *s*, ma-
8. 5. ior, quàm *o*; minor, quàm *q*: habetque *l* ad *s*, minorem rationem, quàm *l* ad *o*; ideſt, minorem,
8. 5. quàm, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*. habet quoque *s* ad *m*, minorem rationem, quàm *q* ad *m*: ideſt, minorem, quàm, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*.

ſup. Itaque *i* ad *r*, maior eſt, quàm, cui propior
hyp. poteſt eſſe *C* ad *D*: & *l* ad *s*, minor. Sed *A* ad
def.4.b. *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C* ad *D*: ergo *A* ad *B*, poteſt eſſe minor, quàm *i* ad *r*, & maior, quàm
ſup. *l* ad *s*. Similiter *r* ad k maior eſt, quàm, cui pro-
hypoth. pior poteſt eſſe *G* ad *H*; & *s* ad *m*, minor: & eſt
def.4.b. *E* ad *F*, quaſi eadem, quæ *G* ad *H*: ergo *E* ad *F* poteſt eſſe minor, quàm *r* ad k; & maior,
4. b. quàm *s* ad *m*. Ergo ex æquali, poteſt ex *A* ad *B*,

A	*B*		*C*	*D*
E	*F*		*G*	*H*
i	*n*	*r*	*p*	*k*
l	*o*	*s*	*q*	*m*

& *E* ad *F* composita, minor esse, quàm, quæ ex *i* ad *r*, & *r* ad k, componitur, *i* ad k; & maior, quàm, quæ ex *l* ad *s*, & *s* ad *m*, componitur, *l* ad *m*. Est autem *i* ad k, sumpta quælibet maior, quàm cui propior potest esse composita ex *C* ad *D*, & *G* ad *H*; & *l* ad *m*, minor. Ergo composita ex *A* ad *B*, & *E* ad *F*, quasi eadem est, quæ composita ex *C* ad *D*, & *G* ad *H*. Quod &c.

constr. *def.4.h.*

Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

QVasi proportionales, permutando, sunt quasi proportionales. *Hypoth.*

Sint quasi proportionales *A* ad *B*, vt *C* ad *D*.

Dico permutando, quasi proportionales esse *A* ad *C*, vt *B* ad *D*. *Demonstr.*

hypoth. Sunt enim quasi eędem rationes *A* ad *B*, & *B*
21. h. ad *C*; quæ *B* ad *C*, & *C* ad *D*: ergo ex æquali, *A* ad *C*, & *B* ad *D*, rationes compositę sunt qua-
def.5.h. si eædem: Ergo *A* ad *C*, & *B* ad *D*, sunt quasi proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 23. Prop. 23.

Rationes quaſi eædem, componendo, ſunt quaſi eædem.

Hypoth.

A ad *B*, quaſi eadem eſto, quæ *C* ad *D*.

Dico componendo *A+B* ad *B*, quaſi eandem eſſe, quæ *C+D* ad *D*.

Præpar.

Aſſumatur *e* ad *f*, quælibet ratio maior, quàm cui propior poteſt eſſe *C+D* ad *D*: itē *g* ad *h*, quælibet maioris inæqualitatis, ſed minor.

Demonſtr.

conſtr. | Quoniam *e* ad *f*, maior eſt, quàm, cui propior
p. h. | poteſt eſſe *C+D* ad *D*: diuidendo, *e—f* ad *f*, maior eſt, quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*.
conſtr. | Item quoniam *g* ad *h*, minor eſt, quàm cui pro-
p. h. | pior poteſt eſſe *C+D* ad *D*: diuidendo *g—h* ad *h* minor eſt, quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*.
hypoth. | Sed *A* ad *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C* ad *D*: er-
def. 4. h. | go *A* ad *B*, poteſt eſſe minor, quàm *e—f* ad *f*; &
p. h. | maior, quàm *g—h* ad *h*. Ergo componendo *A+B* ad *B* poteſt eſſe minor, quàm *e* ad *f*; &
def. 4. h. | maior, quàm *g* ad *h*. Ergo *A+B* ad *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C+D* ad *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 24. Prop. 24.

RAtiones quasi eædem, diuidendo, sunt quasi eædem.

Hypoth.

Sint rationes quasi eædem *A* ad *B*, & *C* ad *D*.

Dico diuidendo, quasi easdem esse rationes *A*--*B* ad *B*, & *C*--*D* ad *D*.

Præpar.

Assumatur *e* ad *f*, quælibet ratio maior, quàm cui propior potest esse *C*--*D* ad *D*: & assumatur *g* ad *h*, quælibet minor.

Demonstr.

constr. Quoniam *e* ad *f*, maior est, quàm, cui propior
p. h. potest esse *C*--*D* ad *D*; & *g* ad *h*, minor: ergo componendo *e*+*f* ad *f*, maior est, quàm cui propior potest esse *C* ad *D*; & *g*+*h* ad *h*, minor.
hyp. Sed *A* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* ad *D*: er-
def.4.h. go *A* ad *B* potest minor esse, quàm *e*+*f* ad *f*; &
p. h. maior, quàm *g*+*h* ad *h*. Ergo diuidendo *A*--*B* ad *B*, potest minor esse, quàm *e* ad *f*; & maior,
def.4.h. quàm *g* ad *h*. Ergo *A*--*B* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C*--*D* ad *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 25. Prop. 25.

RAtiones quasi eędem, per conuersionem rationis, sunt quasi eędem.

Hypoth.

Hypoth.

Sint rationes quasi eædem, A ad B, & C ad D.

Dico per conuersionem rationis, quasi easdem esse rationes A ad $A-B$, & C ad $C-D$.

Demonstr.

hyp. | $A; B$: quasi $C: D$.
24. *h.* | $A-B; B$: quasi $C-D; D$.
20. *h.* | $B; A-B$: quasi $D; C-D$.
21. *h.* | $A; A-B$: quasi $C; C-D$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. Propos. 26.

SI quotcunque quantitates fuerint quasi proportionales, colligendo, quasi proportionales erunt, omnes antecedentes, ad omnes consequentes.

Hypoth.

$A; B$: quasi $C; D$:

Dico $A+C; B+D$: quasi $C; D$.

Demonst.

hypoth. | $A; B$: quasi $C; D$.
22. *h.* | $A; C$: quasi $B; D$.
23. *h.* | $A+C; C$: quasi $B+D; D$.
22. *h.* | $A+C; B+D$: quasi $C: D$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Pro. 27.

SI prima ad secundam quasi proportionalis fuerit, sicut tertia ad quartam; & quinta ad secundam, quasi sicut

sexta

ſexta ad quartam: erit prima cum quinta ad ſecundam, quaſi ſicut tertia cum ſexta ad quartam.

Hypoth.

A; B: quaſi C; D.
E; B: quaſi F ad D.
Dico $A + E$; B: quaſi $C + F$; D.

Præpar.

hypoth.	A; B: quaſi C; D.
22. h.	A; C: quaſi B; D.
hypoth.	E; B: quaſi F; D.
22. h.	E; F: quaſi B; D.
19. h.	A; C: quaſi E; F.
22. h.	A; E: quaſi C; F.
23. h.	$A + E$; E: quaſi $C + F$; F.
hypoth.	E; B: quaſi F; D.
21. h.	$A + E$; B: quaſi $C + F$; D. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 28. *Prop.* 28.

Quaſi partes, cum quaſi æquemultiplicibus, in quaſi eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

A; B: quaſi tripla.
C; D: quaſi tripla.
Dico A; C: quaſi B; D.

De-

Demonstr.

18. *h.*	*A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quasi *B*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. Prop. 29.

SI totam ad totam quasi proportionalis fuerit, vt ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam, quasi proportionalis erit, vt tota ad totam.

Hypoth.

A; *B*: quasi *C*: *D*.

Dico *A*—*C*; *B*—*D*: quasi *A*; *B*.

Demonstr.

hypoth.	*A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quasi *B*; *D*.
25. *h.*	*A*; *A*—*C*: quasi *B*; *B*—*D*.
22. *h.*	*A*—*C*; *B*—*D*: quasi *A*; *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 30. Prop. 30.

QVantitates quasi proportionales, & per homologiam, sunt quasi proportionales.

Demonstr.

Nam conuertendo, quasi proportionales fiunt, 20.*h*: & colligendo, 26, & 27. *h*: & æquemultiplicando, & æquepartiendo, 28.*h*: & permutando, 22.*h*: & diuidendo, 24.*h*: & componendo, 23.*h*: & homologas ab homologis

mologis auferendo, 29. *h*: & per conuerſionem rationis, 25. *h*: & ex æquali, 21. *h*: & coniunctis omnifariam argumentis huiuſmodi, quocunque ordine, per homologiam, quaſi proportionales fiunt.

Theor. 31. *Prop.* 31.

QVaſi æquales, ad quaſi æquales, rationes habent, vel quaſi infinitas vtraſque, vel quaſi nullas, vel quaſi eaſdem inter ſe.

Hypoth. comm.

A, *B* ſunt quaſi æquales.

C, *D* ſunt quaſi æquales.

Hypoth. p. caſus.

A; *C*: eſt quaſi infinita.

Dico *B*; *D*: eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur *e* ad *f*, quælibet ratio: vnde fit componendo *e*+*f* ad *f*: deinde per conuerſionem rationis *e*+*f* ad *e*: & conuertendo *e* ad *e*+*f*.

Demonſtr.

def.3.h.	*B*; *A*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *e*+*f*.
def.p.h.	*A*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*+*f*; *f*.
4. *h.*	*B*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *f*.
def.p.h.	*B*; *C*: ratio eſt quaſi infinita.
def.p.h.	*B*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*+*f*; *f*.
def.3.h.	*C*; *D*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *e*+*f*.
4. *h.*	*B*; *D*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *f*.

B; *D*:

def.p.h. | *B*; *D*: ratio est quasi infinita. Quod &c.

Hypoth. 2. casus.

A; *C*: est quasi nulla.

Dico *B*; *D*: esse quasi nullam.

Demonstr.

10. h. | *C*; *A*: quasi infinita.
sup. | *D*; *B*: quasi infinita.
7. h. | *B*; *D*: quasi nulla. Quod &c.

Hypoth. 3. casus.

A; *C*: neq; quasi infinita, neq; quasi nulla est.

Dico *B*; *D*: quasi esse *A*; *C*.

Demonstr.

B ad *D*, neque est quasi infinita, neque quasi nulla:
sup. | alioquin *A* ad *C* esset quasi infinita, vel quasi nulla, contra hypothesim.
19. h. | *A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. h. | *A*; *C*: quasi *B*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 32. Prop. 32.

SI prima ad secundam, rationem habuerit quasi infinitam; item ad tertiam, rationem quasi infinitam: habebit & ad vtriusque summam, & ad vtriusque differentiam, rationem quasi infinitam.

Hypoth.

A; *B*: quasi infinita.

A; *C*: quasi infinita.

Dico $A ; B + C$: quasi infinitam esse.
Et $A ; B - C$: quasi infinitam esse.

Demonstr.

hypoth.	$A ; B$: quasi infinita.
8. *h.*	$A + B ; B$: quasi infinita.
9. *h.*	$A + B ; A$: quasi æqualis.
hypoth.	$A ; C$: quasi infinita.
31. *h.*	$A + B ; C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A + B + C ; C$: quasi infinita.
9. *h.*	$A + B + C ; A + B$: quasi æqualis.
sup.	$A + B ; A$: quasi æqualis.
18. *h.*	$A + B + C ; A$: quasi æqualis.
16. *h.*	$B + C ; A$: quasi nulla.
10. *h.*	$A ; B + C$: quasi infinita. Quod &c.
sup.	$A + B ; C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A + B - C ; C$: quasi infinita.
7. *h.*	$C ; A + B - C$: quasi nulla.
11. *h.*	$A + B ; A + B - C$: quasi æqualis.
sup.	$A ; A + B$: quasi æqualis.
18. *h.*	$A + B - C ; A$: quasi çqualis.
17. *h.*	$A + B - C ; B - C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A ; B - C$: quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. *Propos.* 33.

SI fuerint tres termini, primus indeterminatus, reliqui duo determinati; fuerit autem primus ad secundum

quasi

quasi æqualis: habebit secundus ad tertium eandem rationem, quàm quasi habet primus.

Hypoth.

Tres termini sunt, primus indeterminatus *A*; reliqui duo determinati, *b*, & *c*: & est *A* ad *b*, quasi æqualis.

Dico *b* ad *c* eandem esse rationem, quàm quasi habet *A* ad *c*.

Præpar.

Assumatur *d*, æqualis ipsi *c*.

Demonst.

hypoth.	*A*; *b*: quasi æqualis.
constr.	*c*; *d*: æqualis.
def.4.h.	*A*; *b*: quasi *c*; *d*.
22. *h.*	*A*; *c*: quasi *b*; *d*.
8. 5.	*b*; *d*: *b*; *c*.
19. *h.*	*A*; *c*: quasi *b*; *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. Prop. 34.

Tota ad vnitatem, quasi est infinita.

Demonstr.

Nam tota, cum non dicatur, cuius numeri tota sit; est indeterminata: ideoque totæ ad vnitatem, ratio est indeterminata. Cumque possit dici, cuius numeri tota sit; est determinabilis: ideoque totæ ad vnitatem, ratio est determinabilis. Cum denique possit dici eius numeri tota, qui maior sit, quàm vt ad vnitatem, habeat quamlibet rationem

Theor. 39. Prop. 39.

Æquordinatæ, tota, semitota, & sesquitota, sunt quasi æquales.

Dico $t3$, $q3$, $m3$, quasi æquales esse.

Demonstr.

36. *h.*	t; q: quasi æqualis.
3. *p.*	$t3$; $q3$: triplicata t; q.
21. *h.*	$t3$; $q3$: quasi æqualis. Quod &c.
sup.	$q3$; $m3$: quasi æqualis. Quod &c.
18. *h.*	$t3$; $m3$: quasi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 40. Prop. 40.

Tota magis ordinata, ad aggregatum ex totis minùs ordinatis, quasi est infinita. Item semitota, ad aggregatum ex semitotis: & sesquitota, ad aggregatum ex sesquitotis.

Hypoth.

Esto tota magis ordinata $t3$: qua minùs ordinatæ. $t2$, t, & rationalis u: quarum aggregatum $5t2 + 3t + 4u$.

Dico $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quasi esse infinitam.

Demonstr.

38. *h.*	$t3$; $t2$: quasi infinita.
32. *h.*	$t3$; $5t2$: quasi infinita.
38. *h.*	$t3$; t: quasi infinita.
32. *h.*	$t3$; $3t$: quasi infinita.

$t3$;

37. *b.*	$t3$; u : quaſi infinita.
32. *b.*	$t3$; $4u$; quaſi infinita.
32. *b.*	$t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quaſi infinita. Quod &c.

Similiter oſtendetur, $m3$; $5m2 + 3m + 4u$: quaſi infinita. Quod &c.

Item, $q3$; $5q2 + 3q + 4u$: quaſi infinita. Quod &c. Quare &c.

Theor. 41. *Prop.* 41.

TOta magis ordinata, ſibi ipſi,& alijs minùs ordinatis, additis, vel ſubtractis, quaſi eſt æqualis. Item ſemitota: & ſeſquitota.

Hypoth.

Tota vel ſemitota, vel ſeſquitota magis ordinata eſto A: quacum additæ minùs ordinatæ, ſunto B: & ſubtractæ C.

Dico A, $A + B$, $A - C$, $A + B - C$, quaſi æquales eſſe.

Demonſtr.

40. *b.*	A; B : quaſi infinita.
8. *b.*	$A + B$; B: quaſi infinita.
9. *b.*	$A + B$; A : quaſi æqualis. Quod &c.
40. *b.*	A; C: quaſi infinita.
9. *b.*	A; $A - C$: quaſi æqualis. Quod &c.
32. *b.*	A; $B - C$: quaſi infinita.
8. *b.*	$A + B - C$; $B - C$: quaſi infinita.
9. *b.*	$A + B - C$; A: quaſi æqualis. Quod &c.

Theor. 24. Prop. 24.

RAtiones quasi eædem, diuidendo, sunt quasi eædem.

Hypoth.

Sint rationes quasi eædem A ad B, & C ad D.

Dico diuidendo, quasi easdem esse rationes $A - B$ ad B, & $C - D$ ad D.

Præpar.

Assumatur e ad f, quælibet ratio maior, quàm cui propior potest esse $C - D$ ad D: & assumatur g ad h, quælibet minor.

Demonstr.

constr. | Quoniam e ad f, maior est, quàm, cui propior
p. h. | potest esse $C - D$ ad D; & g ad h, minor: ergo componendo $e + f$ ad f, maior est, quàm cui propior potest esse C ad D; & $g + h$ ad h, minor.
hyp. | Sed A ad B, quasi eadem est, quæ C ad D: er-
def. 4. h. | go A ad B potest minor esse, quàm $e + f$ ad f; &
p. h. | maior, quàm $g + h$ ad h. Ergo diuidendo $A - B$ ad B, potest minor esse, quàm e ad f; & maior,
def. 4. h. | quàm g ad h. Ergo $A - B$ ad B, quasi eadem est, quæ $C - D$ ad D. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 25. Prop. 25.

RAtiones quasi eędem, per conuersionem rationis, sunt quasi eędem.

Hypoth.

Hypoth.

Sint rationes quasi eædem, A ad B, & C ad D.

Dico per conuersionem rationis, quasi easdem esse rationes A ad $A-B$, & C ad $C-D$.

Demonstr.

hyp.	$A;B$: quasi $C:D$.
24. *h.*	$A-B;B$: quasi $C-D;D$.
20. *h.*	$B;A-B$: quasi $D;C-D$.
21. *h.*	$A;A-B$: quasi $C;C-D$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. Propos. 26.

SI quotcunque quantitates fuerint quasi proportionales, colligendo, quasi proportionales erunt, omnes antecedentes, ad omnes consequentes.

Hypoth.

$A;B$: quasi $C;D$:

Dico $A+C;B+D$: quasi $C;D$.

Demonst.

hypoth.	$A;B$: quasi $C;D$.
22. *h.*	$A;C$: quasi $B;D$.
23. *h.*	$A+C;C$: quasi $B+D;D$.
22. *h.*	$A+C;B+D$: quasi $C:D$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Pro. 27.

SI prima ad secundam quasi proportionalis fuerit, sicut tertia ad quartam; & quinta ad secundam, quasi sicut sexta

ſexta ad quartam: erit prima cum quinta ad ſecundam, quaſi ſicut tertia cum ſexta ad quartam.

Hypoth.

A; *B*: quaſi *C*; *D*.
E; *B*: quaſi *F* ad *D*.
Dico *A* + *E*; *B*: quaſi *C* + *F*; *D*.

Præpar.

hypoth.	*A*; *B*: quaſi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quaſi *B*; *D*.
hypoth.	*E*; *B*: quaſi *F*; *D*.
22. *h.*	*E*; *F*: quaſi *B*; *D*.
19. *h.*	*A*; *C*: quaſi *E*; *F*.
22. *h.*	*A*; *E*: quaſi *C*; *F*.
23. *h.*	*A* + *E*; *E*: quaſi *C* + *F*; *F*.
hypoth.	*E*; *B*: quaſi *F*; *D*.
21. *h.*	*A* + *E*; *B*: quaſi *C* + *F*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 28. *Prop.* 28.

Quaſi partes, cum quaſi æquemultiplicibus, in quaſi eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

A; *B*: quaſi tripla.
C; *D*: quaſi tripla.
Dico *A*; *C*: quaſi *B*; *D*.

De-

Demonstr.

18. *h.* | *A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.* | *A*; *C*: quasi *B*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. *Prop.* 29.

SI totam ad totam quasi proportionalis fuerit, vt ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam, quasi proportionalis erit, vt tota ad totam.

Hypoth.

A; *B*: quasi *C*: *D*.

Dico *A*—*C*; *B*—*D*: quasi *A*; *B*.

Demonstr.

hypoth. | *A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.* | *A*; *C*: quasi *B*; *D*.
25. *h.* | *A*; *A*—*C*: quasi *B*; *B*—*D*.
22. *h.* | *A*—*C*; *B*—*D*: quasi *A*; *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 30. *Prop.* 30.

QVantitates quasi proportionales, & per homologiam, sunt quasi proportionales.

Demonstr.

Nam conuertendo, quasi proportionales fiunt, 20.*h*: & colligendo, 26, & 27. *h*: & æquemultiplicando, & æquepartiendo, 28. *h*: & permutando, 22. *h*: & diuidendo, 24. *h*: & componendo, 23. *h*: & homologas ab homologis

mologis auferendo, 29.*h*: & per conuerſionem rationis, 25.*h*: & ex æquali, 21.*h*: & coniunctis omnifariam argumentis huiuſmodi, quocunque ordine, per homologiam, quaſi proportionales fiunt.

Theor. 31. Prop. 31.

QVaſi æquales, ad quaſi æquales, rationes habent, vel quaſi infinitas vtraſque, vel quaſi nullas, vel quaſi eaſdem inter ſe.

Hypoth. comm.

A, *B* ſunt quaſi æquales.
C, *D* ſunt quaſi æquales.

Hypoth. p. caſus.

A; *C*: eſt quaſi infinita.
Dico *B*; *D*: eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur *e* ad *f*, quælibet ratio: vnde fit componendo *e*+*f* ad *f*: deinde per conuerſionem rationis *e*+*f* ad *e*: & conuertendo *e* ad *e*+*f*.

Demonſtr.

def.3.h.	*B*; *A*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *e*+*f*.
def.p.h.	*A*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*+*f*; *f*.
4. h.	*B*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *f*.
def.p.h.	*B*; *C*: ratio eſt quaſi infinita.
def.p.h.	*B*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*+*f*; *f*.
def.3.h.	*C*; *D*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *e*+*f*.
4. h.	*B*; *D*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *f*.

B; *D*:

def. p. h. | $B ; D$: ratio est quasi infinita. Quod &c.

Hypoth. 2. casus.

$A ; C$: est quasi nulla.

Dico $B ; D$: esse quasi nullam.

Demonstr.

10. h. | $C ; A$: quasi infinita.

sup. | $D ; B$: quasi infinita.

7. h. | $B ; D$: quasi nulla. Quod &c.

Hypoth. 3. casus.

$A ; C$: neq; quasi infinita, neq; quasi nulla est.

Dico $B ; D$: quasi esse $A ; C$.

Demonstr.

B ad D, neque est quasi infinita, neque quasi nulla:

sup. | alioquin A ad C esset quasi infinita, vel quasi nulla, contra hypothesim.

19. h. | $A ; B$: quasi $C ; D$.

22. h. | $A ; C$: quasi $B ; D$. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 32. Prop. 32.

SI prima ad secundam, rationem habuerit quasi infinitam; item ad tertiam, rationem quasi infinitam: habebit & ad vtriusque summam, & ad vtriusque differentiam, rationem quasi infinitam.

Hypoth.

$A ; B$: quasi infinita.

$A ; C$: quasi infinita.

Dico $A; B+C$: quasi infinitam esse.

Et $A; B-C$: quasi infinitam esse.

Demonstr.

hypoth.	$A; B$: quasi infinita.
8. *h.*	$A+B; B$: quasi infinita.
9. *h.*	$A+B; A$: quasi æqualis.
hypoth.	$A; C$: quasi infinita.
31. *h.*	$A+B; C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A+B+C; C$: quasi infinita.
9. *h.*	$A+B+C; A+B$: quasi æqualis.
sup.	$A+B; A$: quasi æqualis.
18. *h.*	$A+B+C; A$: quasi æqualis.
16. *h.*	$B+C; A$: quasi nulla.
10. *h.*	$A; B+C$: quasi infinita. Quod &c.
sup.	$A+B; C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A+B-C; C$: quasi infinita.
7. *h.*	$C; A+B-C$: quasi nulla.
11. *h.*	$A+B; A+B-C$: quasi æqualis.
sup.	$A; A+B$: quasi æqualis.
18. *h.*	$A+B-C; A$: quasi ęqualis.
17. *h.*	$A+B-C; B-C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A; B-C$: quasi infinita. Quod &c.

∴ Quare &c.

Theor. 33. Propos. 33.

SI fuerint tres termini, primus indeterminatus, reliqui duo determinati; fuerit autem primus ad secundum quasi

quasi æqualis: habebit secundus ad tertium eandem rationem, quàm quasi habet primus.

Hypoth.

Tres termini sunt, primus indeterminatus *A*; reliqui duo determinati, *b*, & *c*: & est *A* ad *b*, quasi æqualis.

Dico *b* ad *c* eandem esse rationem, quàm quasi habet *A* ad *c*.

Præpar.

Assumatur *d*, æqualis ipsi *c*.

Demonst.

hypoth.	*A*; *b*: quasi æqualis.
constr.	*c*; *d*: æqualis.
def.4.h.	*A*; *b*: quasi *c*; *d*.
22. *h.*	*A*; *c*: quasi *b*; *d*.
8. 5.	*b*; *d*: *b*; *c*.
19. *h.*	*A*; *c*: quasi *b*; *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. Prop. 34.

Tota ad vnitatem, quasi est infinita.

Demonstr.

Nam tota, cum non dicatur, cuius numeri tota sit; est indeterminata: ideoque totæ ad vnitatem, ratio est indeterminata. Cumque possit dici, cuius numeri tota sit; est determinabilis: ideoque totæ ad vnitatem, ratio est determinabilis. Cum denique possit dici eius numeri tota, qui maior sit, quàm vt ad vnitatem, habeat quamlibet rationem

nem datam; qui numerus, ipsa sui ipsius est tota: erit ratio totæ ad vnitatem, maior, quàm data
def.p.b. quælibet. Ergo tota ad vnitatem, quasi est infinita.

Theor. 35. Prop. 35.

SEsquitota ad vnitatem, quasi est infinita. Item semitota.

Demonstr.

34. b. Tota ad vnitatem, quasi est infinita: ergo com-
8. b. ponendo, sesquitota ad vnitatem, quasi est infi-
8. b. nita. Item diuidendo, semitota ad vnitatem, quasi est infinita.

Theor. 36. Prop. 36.

TOta, sesquitota, & semitota, quasi sunt æquales inter se. *Demonstr.*

35. b. Sesquitota ad vnitatem, quasi est infinita: ergo
9. b. per conuersionem rationis, sesquitota ad totam,
34. b. quasi est æqualis. Rursum tota ad vnitatem quasi
9. b. sit infinita: ergo per conuersionem rationis, tota
18. b. ad semitotam, quasi est æqualis. Ergo sesquitota ad semitotam, quasi est æqualis.

Theor. 37. Prop. 37.

TOta quantumlibet ordinata ad vnitatem, quasi est infinita. Item sesquitota, & semitota.

Dico

Dico $t3$; u: quasi infinitum.

Demonstr.

34. *h.* | t; u: quasi infinita.
def. 6. *p.* | $t3$; u: triplicata t; u.
12. *h.* | $t3$; u: quasi infinita. Quod &c.
ex 35. *h.* | Similiter ostendetur $q3$; u: quasi infinita.
| Item $m3$; u: quasi infinita.

Quare &c.

Theor. 38. *Prop.* 38.

Totarum inæqualiter ordinatarum, magis ordinata, ad minùs ordinatam, quasi est infinita. Item sesquitotarum, & semitotarum.

Hypoth.

$t5$ magis est ordinata, quà n $t3$.

Dico $t5$; $t3$: quasi infinitam.

Demonstr.

34. *h.* | t; u: quasi infinita.
def. 6. *p.* | $t5$; $t4$: t; u.
def. 6. *p.* | $t4$; $t3$: t; u.
13. 5. | $t5$; $t4$: quasi infinita.
13. 5. | $t4$; $t3$: quasi infinita.
12. *h.* | $t5$; $t3$: quasi infinita. Quod &c.

Similiter ostendetur $q5$; $q3$: quasi infinita.

Et $m5$; $m3$: quasi infinita.

Quare &c.

Theor.

nem datam; qui numerus, ipsa sui ipsius est totæ: erit ratio totæ ad vnitatem, maior, quàm data
def.p.b. quælibet. Ergo tota ad vnitatem, quasi est infinita.

Theor. 35. *Prop.* 35.

SEsquitota ad vnitatem, quasi est infinita. Item semitota.

Demonstr.

34. b. Tota ad vnitatem, quasi est infinita: ergo com-
8. b. ponendo, sesquitota ad vnitatem, quasi est infi-
8. b. nita. Item diuidendo, semitota ad vnitatem, quasi est infinita.

Theor. 36. *Prop.* 36.

TOta, sesquitota, & semitota, quasi sunt æquales inter se. *Demonstr.*

35. b. Sesquitota ad vnitatem, quasi est infinita: ergo
9. b. per conuersionem rationis, sesquitota ad totam,
34. b. quasi est æqualis. Rursum tota ad vnitatem quasi
9. b. sit infinita: ergo per conuersionem rationis, tota
18. b. ad semitotam, quasi est æqualis. Ergo sesquitota ad semitotam, quasi est æqualis.

Theor. 37. *Prop.* 37.

TOta quantumlibet ordinata ad vnitatem, quasi est infinita. Item sesquitota, & semitota.

Dico

Dico $t3$; u: quasi infinitum.

Demonstr.

34. *h.* | t ; u: quasi infinita.
def.6.p. | $t3$; u: triplicata t ; u.
12. *h.* | $t3$; u: quasi infinita. Quod &c.
ex35.h. | Similiter ostendetur $q3$; u: quasi infinita.
Item $m3$; u: quasi infinita.

Quare &c.

Theor. 38. *Prop.* 38.

Totarum inæqualiter ordinatarum, magis ordinata, ad minùs ordinatam, quasi est infinita. Item sesquitotarum, & semitotarum.

Hypoth.

$t5$ magis est ordinata, quàm $t3$.
Dico $t5$; $t3$: quasi infinitam.

Demonstr.

34. *h.* | t ; u: quasi infinita.
def.6.p. | $t5$; $t4$: t ; u.
def.6.p. | $t4$; $t3$: t ; u.
13. 5. | $t5$; $t4$: quasi infinita.
13. 5. | $t4$; $t3$: quasi infinita.
12. *h.* | $t5$; $t3$: quasi infinita. Quod &c.

Similiter ostendetur $q5$; $q3$: quasi infinita.
Et $m5$; $m3$: quasi infinita.
Quare &c.

Theor. 39. *Prop.* 39.

Æ Quœordinatæ, tota, ſemitota, & ſeſquitota, ſunt quaſi æquales.

Dico $t3$, $q3$, $m3$, quaſi æquales eſſe.

Demonſtr.

36. *h.* | t; q: quaſi æqualis.
3. *p.* | $t3$; $q3$: triplicata t; q.
21. *h.* | $t3$; $q3$: quaſi ęqualis. Quod &c.
ſup. | $q3$; $m3$: quaſi æqualis. Quod &c.
18. *h.* | $t3$; $m3$: quaſi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 40. *Prop.* 40.

Tota magis ordinata, ad aggregatum ex totis minùs ordinatis, quaſi eſt infinita. Item ſemitota, ad aggregatum ex ſemitotis: & ſeſquitota, ad aggregatum ex ſeſquitotis.

Hypoth.

Eſto tota magis ordinata $t3$: qua minùs ordinatæ. $t2$, t, & rationalis u: quarum aggregatum $5t2 + 3t + 4u$.

Dico $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quaſi eſſe infinitam.

Demonſtr.

38. *h.* | $t3$; $t2$: quaſi infinita.
32. *h.* | $t3$; $5t2$: quaſi infinita.
38. *h.* | $t3$; t: quaſi infinita.
32. *h.* | $t3$; $3t$: quaſi infinita.

37. b. | $t3$; u : quaſi infinita.
32. b. | $t3$; $4u$: quaſi infinita.
32. b. | $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quaſi infinita. Quod &c.

Similiter oſtendetur, $m3$; $5m2 + 3m + 4u$: quaſi infinita. Quod &c.

Item, $q3$; $5q2 + 3q + 4u$: quaſi infinita. Quod &c. Quare &c.

Theor. 41. *Prop.* 41.

TOta magis ordinata, ſibi ipſi, & alijs minùs ordinatis, additis, vel ſubtractis, quaſi eſt æqualis. Item ſemitota: & ſeſquitota.

Hypoth.

Tota vel ſemitota, vel ſeſquitota magis ordinata eſto A: quacum additæ minùs ordinatæ, ſunto B: & ſubtractæ C.

Dico A, $A + B$, $A - C$, $A + B - C$, quaſi æquales eſſe.

Demonſtr.

40. b. | A ; B : quaſi infinita.
8. b. | $A + B$; B : quaſi infinita.
9. b. | $A + B$; A : quaſi æqualis. Quod &c.
40. b. | A ; C : quaſi infinita.
9. b. | A ; $A - C$: quaſi æqualis. Quod &c.
32. b. | A ; $B - C$: quaſi infinita.
8. b. | $A + B - C$; $B - C$: quaſi infinita.
9. b. | $A + B - C$; A : quaſi æqualis. Quod &c.

18. b. $A+B-C$, $A+B$, $A-C$, quaſi ſunt æquales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 42. *Prop.* 42.

QVælibet quadratrix quaſi eſt æqualis ad totam vnitate plus ordinatam, quàm ſit eius baſis. item ad ſemitotam: & ad ſeſquitotam.

Hypoth.

Eſto quadratrix A: & eſto tota B, vnitate plus ordinata, quàm baſis quadratricis A.

Dico A ad B, quaſi æqualem eſſe.

Demonſtr.

22. 2. A, eſt æqualis ipſi B, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm
hypoth. baſis A. Sed B, eſt tota vnitate plus ordinata, quàm baſis A: ideòque totæ, non plus ordinatę, quàm baſis A, ſunt minùs ordinatæ, quàm B. Ergo A; eſt æqualis ipſi B, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm
41. b. B. Sed & B, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm B, quaſi eſt
18. b. æqualis ipſi B. Ergo A, quaſi eſt æqualis ipſi B. Quod &c.

31. 2. Idem, & eodem modo demonſtraretur, ſi B
32. 2. eſſet ſemitota: necnō ſi B eſſet ſeſquitota. Quę &c.

Quare &c.

Theor. 43. Prop. 43.

QVælibet quadratrix, ad totas non plus ordinatas, quàm ſit eius baſis, quomodolibet acceptas, quaſi eſt infinita. item ad ſemitotas: necnon ad ſeſquitotas.

Hypoth.

Eſto quadratrix *A*: & in *B* ſint ſumptæ totæ quomodolibet, vel ſemitotæ, vel ſeſquitotæ.

Dico *A* ad *B* quaſi infinitam eſſe.

Præpar.

Sumatur *C*, tota, vnitate plus ordinata, quàm baſis quadratricis *A*: vel ſemitota, vel ſeſquitota.

Demonſtr.

41. *h.* | *C*; *B*: quaſi infinita.
42. *h.* | *A*; *C*: quaſi æqualis.
31. *h.* | *A*; *D*: quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 44. Prop. 44.

RAtionis quaſi infinitæ diuiſo antecedente per datum numerum, ratio eſt quaſi infinita.

Hypoth.

A ad *B*, quaſi eſt infinita.

Dico ſubtriplam *A* ad *B*, quaſi infinitam eſſe.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

hypoth. | *A*; *B*: quasi infinita.
def.p.h. | *A*; *B*: potest maior esse, quàm 3*c*; *d*.
p. h. | *A*; 3*c*: potest maior esse, quàm *B*; *d*.
15. 5. | *A*; 3*c*: subtripla *A*; *c*.
13. 5. | Subtripla *A*; *c*: potest maior esse, quàm *B*; *d*.
p. h. | Subtripla *A*; *B*: potest maior esse, quàm *c*; *d*.
def.p.h. | Subtripla *A*; *B*: quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 45. *Prop.* 45.

Rationis quasi infinitæ multiplicato consequente, ratio est quasi infinita.

Hypoth.

A ad *B*, quasi est infinita.

Dico *A* ad duplam *B*, quasi esse infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

hypoth. | *A*; *B*: quasi infinita.
def.p.h. | *A*; *B*: potest maior esse, quàm 2*c*; *d*.
p. h. | *A*; 2*c*: potest maior esse, quàm *B*; *d*.
15. 5. | *B*; *d*: 2*B*; 2*d*.
13. 5. | *A*; 2*c*: potest maior esse, quàm 2*B*; 2*d*.
p. h. | *A*; 2*B*: potest maior esse, quàm 2*c*; 2*d*:
15. 5. | 2*c*; 2*d*: *c*; *d*.
13. 5. | *A*; 2*B*: potest maior esse, quàm *c*; *d*.

A; 2*B*:

def.p.b. | *A*; 2*B*: quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 46. Prop. 46.

RAtio composita ex duabus rationibus, altera, quasi quadam proposita, altera, quasi infinita; quasi est infinita.

Hypoth.

A; *B*: quasi quædam proposita.

B; *C*: quasi infinita.

Dico *A*; *C*: quasi esse infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio, *d* ad *e*: item assumatur quælibet *d* ad *f*, minor, quàm, cui quasi eadem esse dicitur *A* ad *B*.

Demonstr.

hypoth. | *B*; *C*: quasi est infinita.
def.p.h. | *B*; *C*: potest maior esse, quàm *f*; *e*.
def.3.h. | *A*; *B*: potest maior esse, quàm *d*; *f*.
4. *h.* | *A*; *C*: potest maior esse, quàm *d*; *e*.
def.p.h. | *A*; *C*: quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 47. Prop. 47.

QVadratrices in eadem basi iacentes, inter se sunt quasi æquales.

Hy-

Hypoth.

Sint in eadem basi quadratrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.
Dico $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, quasi æquales esse.

Præpar.

Sumatur C, tota, vnitate plus ordinata, quàm sit basis ipsarum $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Demonstr.

43. h. | $\mathcal{A}$; C: quasi æqualis.
43. h. | $\mathcal{B}$; C: quasi æqualis.
18. h. | $\mathcal{A}$; C: quasi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 48. *Propos.* 48.

SVb quadratrices in eadem basi iacentes, sunt quasi æquales.

Hypoth.

Sint in eadem basi subquadratrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.
Dico $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, quasi æquales esse.

Præpar.

Sumantur homonymæ quadratrices C, D.

Demonstr.

def.13.2 | C ad $\mathcal{A}$, æquemultiplex est, vt D ad $\mathcal{B}$.
15. 5. | C; $\mathcal{A}$: D; $\mathcal{B}$.
16. 5. | C; D: $\mathcal{A}$; $\mathcal{B}$.
47. h. | C; D: quasi ęqualis.
19. h. | $\mathcal{A}$; $\mathcal{B}$: quasi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 49. Prop. 49.

IN diuersis basibus, quadratrix in magis ordinata, ad quadratricem in minùs ordinata, quasi est infinita.

Hypoth.

Sint quadratrices *A*, *B*, in diuersis basibus: *A*, in magis ordinata basi, quàm *B*.

Dico *A* ad *B*, quasi esse infinitam.

Præpar.

Assumatur tota *C*, vnitate plus ordinata, quàm sit basis quadratricis *A*: & tota *D*, vnitate plus ordinata, quàm sit basis quadratricis *B*.

Demonstr.

hypoth. | Quoniam *A* est in basi magis ordinata, quàm
38. h. | *B*: ergo etiam *C* est magis ordinata tota, quàm
42. h. | *D*: ergo *C* ad *D*, quasi est infinita. Sed *C*, *A*,
31. h. | sunt quasi æquales: & *D*, *B*, quasi æquales. Ergo *A* ad *B*, quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 50. Prop. 50.

IN diuersis basibus, quælibet massa in magis ordinata, ad quamlibet massam, in minùs ordinata, quasi est infinita.

Hypoth.

Sint massæ *A*, *B*, in diuersis basibus: *A* in magis ordinata basi, quàm *B*.

Dico *A* ad *B*, quasi esse infinitam.

Præ-

Præpar.

Assumantur quadratrices *C*, *D*: *C* quidem homonyma ipsi *A*; & *D*, ipsi *B*.

Demonstr.

hypoth. Quoniam *A*, est in basi magis ordinata, quàm *B*: etiam *C*, est in basi magis ordinata, quàm
49. h. *D*: & *C* ad *D*, quasi est infinita. Est autem ratio *A* ad *C*, quædam proposita, quàm habent propositi numeri multiplicantes homonymam
46. h. speciem: ergo ex æquali, *A* ad *D*, ratio est quasi infinita. Item *D* ad *B*, ratio est quædam proposita, quàm habent propositi numeri multipli-
46. h. cantes hononymam speciem: ergo ex æquali, *A* ad *B*, ratio est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 51. *Prop.* 51.

Species in eadem basi iacentes, sunt reciprocè quasi proportionales, vt numeri, in tabula multiplicium, similiter iacentes.

Hypoht.

Sint in eadem basi species *A*, *B*: & sint numeri similiter iacentes, in tabula multiplicium; *c* similiter, atque *A*; & *d*, similiter, atque *B*.

Dico *A*; *B*: quasi *d*; *c*.

Præpar.

Sumantur subquadratrices *E*, *F*: *E* quidem homonyma ipsi *A*; & *F*, ipsi *B*.

De-

Demonstr.

deff. 11. *p.* & 2.	*A*; *E*: *u*; *c*.
48. *h.*	*E*; *F*: quasi æqualis.
deff. 11. *p.* & 2.	*F*; *B*: *d*; *u*.
21. *h.*	*A*; *B*: quasi *d*; *c*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 52. *Prop.* 52.

MAssæ in eadem basi iacentes, quasi eamdem habent rationem compositam, ex directa suorum numerorum, & reciproca numerorum in tabula multiplicium similiter iacentium.

Hypoth.

Sint in eadem basi, massæ *A*, *B*: quarum numeri *c*, *d*: *c* quidem, qui multiplicans homonymam speciem *A*, facit massam *A*; & *d*, qui multiplicans homonymam speciem *B*, facit massam *B*. Et sint numeri *e*, *f*, similiter iacentes in tabula multiplicium; *e* quidem, sicut *A*; & *f*, sicut *B*.

Dico *A*; *B*: quasi *c*; *d*, + *f*; *e*.

Præpar.

Sumantur species homonymæ *G*, *H*: *G* quidem ipsi *A*; & *H*, ipsi *B*.

Demonstr.

hypoth.	*A*; *G*: *c*; *u*.
51. *h.*	*G*; *H*: quasi *f*; *e*.
hypoth.	*H*; *B*: *u*; *d*.
21. *h.*	*A*; *B*: quasi *c*; *d*, + *f*; *e*. Quod &c. Quare &c.

Proplema primum Prop. 53.

DAta ratione; datoque numero pariter pari: subtotuplicatam rationem inuenire, quotus est datus numerus.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: datusque numerus *c*, pariter par.

Oportet rationem inuenire, subtotuplicatam rationis, *a* ad *b*, quotus est *c*.

Constr.

Subdiuidatur numerus *c*, vsque ad vnitatem: & sit *c* ad *d*, duplus: & *d* ad *f*, duplus: & *f* ad vnitatem, duplus. Deinde sumatur, inter *a*, *b*, media proportionalis *g*: & inter *a*, *g*, media proportionalis *h*: & inter *a*, *h*, media proportionalis *i*: vt fiant sumptiones totidem, quot sunt, numeri *c* diuisiones bifariam, vsque ad vnitatem.

Dico *a*; *i*: subtotuplicatam *a*; *b*, quotus est *c*.

Demonstr.

constr. | *a*; *b*: duplicata *a*; *g*, sicut *c*; *d*: duplus.
constr. | *a*; *g*: duplicata *a*; *h*, sicut *d*; *f*: duplus.
constr. | *a*; *h*: duplicata *a*; *i*, sicut *f*; *u*: duplus.
p. p. | *a*; *b*: multiplicata *a*: *i*, sicut *c*; *u*: multiplus.
| *a*; *i*: subtotuplicata *a*; *b*, quotus est *c*. Quod erat faciendum.

Quare data ratione, datoque numero pariter pari, subtotuplicatam rationem inuenimus, quotus est datus numerus.

Probl. 2. Prop. 54.

DAta ratione inæqualitatis; & proposito numero ordinis potestatum: numerum inuenire, pro quo sesquitota, & semitota æqueordinatæ, sunt ad inuicem propiores æqualitati.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a*, ad *b*: & sit *a*, maior, quàm *b*: sitque datus numerus quinarius.

Oportet numerum inuenire, quo quo sesquitota quinta, ad semitotam quintam, minor est, quàm vt *a* ad *b*: & semitota quinta, ad sesquitotam quintam, maior, quàm vt *b* ad *a*.

Constr.

Sumatur numerus pariter par, nõ minor, quàm
53. *b.* datus quinarius: & sit sumptus octonarius: & suboctuplicata ratio inueniatur, rationis *a* ad *b*; quę sit *a* ad *c*: & sumatur numerus *d*, maior ad binarium, quàm vt *a* ad *a*---*c*: qui, dempto binario, relinquatur *e*: & inter *d*, *e*, sumatur nume-
deff. 18. & 19. 2 rus *f*: pro quo, vt radice tota; semitota est *e*; sesquitota *d*.

Dico *d*5; *e*5: minorem esse, quàm *a*; *b*.

Et *e*5; *d*5: maiorem, quàm *b*; *a*.

Demonstr.

constr. *d*; 2: maior, quàm *a*; *a*---*c*.

3. *b.* *a*; *c*: minor, quàm *a*5; *c*.

4. *b.* *d*5; *e*5: minor, quàm *a*5; *c*5.

5. h.	$a5$; $c5$: minor, quàm $a8$; $c8$.
constr.	$a8$; $c8$: a; b.
13. 5.	$d5$; $e5$: minor, quàm a; b. Quod &c.
2. h.	$e5$; $d5$: maior, quàm b; a. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 3. Prop. 55.

DAta ratione; & propositis ordinibus potestatum inæqualibus: numerum inuenire, pro quo, plus ordinata potestas, ad minùs ordinatam, maior est, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio, a ad b: sint propositi ordines potestatum inæquales, quinarius, & binarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, potestas quinta ad secundam, maior est, quàm vt a ad b.

Constr.

Sumatur numerus c, in serie tertiarum potestatum ab omnibus numeris, maior ad vnitatem, quàm vt a ad b: numeri autem c, sit radix d.

Dico, pro d radice, $d5$; $d2$: maiorem esse, quàm a; b.

Demonstr.

constr.	c: $d3$.
8. 5. & def. 6. p.	c; u: $d3$; u: $d5$; $d2$.
constr.	c; u: maior, quàm a; b.
13. 5.	$d5$; $d2$: maior, quàm a; b. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 4. *Prop.* 56.

DAta ratione; propositisque ordinibus potestatum inæqualibus: numerum inuenire, pro quo, semitota plus ordinata, ad sesquitotam minùs ordinatam, maior est, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio a ad b: sintque propositi ordines potestatum, quinarius, atque ternarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, semitota quinta ad sesquitotam tertiam, maior est, quàm vt a ad b.

Constr.

Inueniatur *per* 55.*h.* numerus c, pro quo, semitota d: & semitota quinta $d5$, ad semitotam tertiam $d3$, maior est, quàm vt $a+b$ ad b. Inueniatur deinde *per* 54.*h.* numerus e, non minor, quàm c; pro quo, semitota m, & sesquitota q; & $m3$ ad $q3$, maior est, quàm vt a ad $a+b$.

Dico, pro numero e radice, $m5$; $q3$: maiorem esse, quàm a; b. *Demonstr.*

constr.	e: non minor, quàm c.
def. 18.2	m: non minor, quàm d.
5. *h.*	$m5$; $d5$: non minor, quàm $m3$; $d3$.
p. *h.*	$m5$; $m3$: non minor, quàm $d5$; $d3$.
constr.	$d5$; $d3$: maior, quàm $a+b$; b.
13. 5.	$m5$; $m3$: maior, quàm $a+b$; b.
constr.	$m3$; $q3$: maior, quàm a, $a+b$.
4. *h.*	$m5$; $q3$: maior, quàm a; b. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 5. Prop. 57.

DAtis duabus rationibus; & propositis duobus inæqualibus ordinibus potestatum: numerum inuenire, pro quo, ratio composita ex vna data ratione, & ex ratione semitotæ plus ordinatæ, ad sesquitotam minùs ordinatam, maior est, quàm altera data ratio.

Hypoth.

Sint datæ rationes, *a* ad *b*, & *c* ad *d*: & sint propositi ordines inæquales, quinarius, & binarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, ratio composita ex *a* ad *b*, & ex semitotæ quintæ ad sesquitotam secundam, maior est, quàm *c* ad *d*.

Constr.

56. *h.* | Fiat vt *b* ad *a*, ita *d* ad *e*: & inueniatur *f* numerus, pro quo, semitota *g*, sesquitota *h*; & *g5* ad *h3*, maior, quàm *c* ad *e*.

Dico, pro *f* radice, *a*; *b*, + *g5*; *h3*: maiorem esse, quàm *c*; *d*.

Demonstr.

constr. | *g5*; *h3*: maior, quàm *c*; *e*.
constr. | *a*; *b*: *e*; *d*.
4. *h.* | *a*; *b*, + *g5*; *h3*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 6. Prop. 58.

DAta ratione inæqualitatis; & propositis duabus in eadem basi iacentibus quadratricibus: numerum in-

inuenire, pro quo quadratrices propositæ, sunt propiores æqualitati, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*: & sit *a* maior, quàm *b*: sintque propositæ in quinta basi, duæ quadratrices *c*, *d*.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c*, & *d*, sunt ad inuicem, minores, quàm vt *a* ad *b*; maiores, quàm vt *b* ad *a*.

Constr.

54. b. | Inueniatur numerus *e*, pro quo, semitota *f*, sesquitota *g*; & *f*6 ad *g*6, maior est, quàm vt *b* ad *a*; & *g*6 ad *f*6, minor, quàm vt *a* ad *b*.

Dico, pro *e* radice, quadratrices *c*, *d*, esse ad inuicem minores, quàm vt *a* ad *b*; maiores, quàm vt *b* ad *a*.

Demonstr.

30. 2. | *c*, est maior, quàm *f*6. minor, quàm *g*6.

30. 2. | *d*, est maior, quàm *f*6. minor, quàm *g*6.

8. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *f*6. *g*6. minor, quàm *g*6; *f*6.

2. b. | *d*; *c*: minor, quàm *g*6. *f*6. maior, quàm *f*6; *g*6.

constr. | *f*6; *g*6: maior, quàm *b*; *a*.

constr. | *g*6; *f*6: minor, quàm *a*; *b*.

13. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *b*; *a*. minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.

13. 5. | *d*; *c*: minor, quàm *a*; *b*. maior, quàm *b*; *a*. Quod &c.

Quare &c.

Pro-

Probl. 7. Prop. 59.

DAta ratione; & propositis duabus non in eadem basi iacentibus quadratricibus: numerum inuenire, pro quo, quadratrix, quæ iacet in plus ordinata basi, ad alteram, maior est, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & propositæ sint quadratrices duæ *c*, *d*; *c*, in quinta basi; *d*, in secunda.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c* ad *d*, maior est, quàm vt *a* ad *b*.

Constr.

56. *b.* | Inueniatur numerus *e*, pro quo, semitota *f*, sesquitota *g*: & *f6* ad *g3*, maior sit, quàm vt *a* ad *b*.

Dico, pro *e* radice, *c*; *d*: maiorem esse, quàm *a*; *b*.

Demonstr.

30. 2. | *c*, maior est, quàm *f6*.
30. 2. | *d*, minor est, quàm *g3*.
8. 5. | *c*; *d*: maior est, quàm *f6*; *g3*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 8. Prop. 60.

DAta ratione; & propositis duabus non in eadem basi iacentibus massis: numerum inuenire, pro quo, massa, quæ iacet in plus ordinata basi, ad alteram, maior est, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: sintque duæ massæ *c*, *d* *c*; quidem, in quinta basi; *d*, in tertia.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c* ad *d*, maior est, quàm vt *a* ad *b*.

Constr.

Fiat, vt massa *c* ad sibi synonymam quadratricem *e*, sic *a* ad *f*: & vt synonyma ipsi *d* quadratrix *g*, ad ipsam *d*, sic fiat *h* ad *b*: & inueniatur numerus *i*, pro quo, quadratrix *e*, ad quadratricem *g*, maior est, quàm vt *f* ad *h*. 59. *b.*

Dico pro *i* radice, massam *c* ad massam *d*, maiorem esse, quàm vt *a* ad *b*.

Demonstr.

constr. | *c*; *e*: *a*; *f*.

constr. | *e*; *g*: maior, quàm *f*; *h*.

constr. | *g*; *d*: *h*; *b*.

4. *b.* | *c*; *d*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 9. Prop. 61.

Propositis in eadem basi iacentibus duabus massis; & datis duabus rationibus, non ijsdem, quàm quasi habent ad inuicem massæ, sed maiore vna, minore altera: numerum inuenire, pro quo, massæ propositæ rationem habent minorem, quàm data maior, & maiorem, quàm data minor.

Hypoth.

Sint massę *a*, *d*: & sit ratio *i* ad *s*, quàm quasi habet *a* ad *d*: & sit *e* ad *h*, maior, quàm *i* ad *s*; & *n* ad *r*, minor.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *a* ad *d*, est minor, quàm *e* ad *h*; & maior, quàm *n* ad *r*.

Constr.

Sumatur ipsi *a*, synonyma quadratrix *b*; & ipsi *d* synonyma *c*. Fiat deinde.

a; *b*: *e*; *f*: *i*; *k*: *n*; *o*.

c; *d*: *g*; *h*: *l*; *s*: *p*; *r*.

Demonstr.

hypoth.	*a*; *d*: quasi *i*; *s*.
def.17.5	*a*; *b*, +*b*; *c*, + *c*; *d*: quasi *i*; *k*, +*k*; *l*+*l*; *s*.
constr.	*a*; *b*: *i*; *k*.
constr.	*c*; *d*: *l*; *s*.
	b; *c*: quasi *k*; *l*.
27. *h.*	*b*; *c*: quasi æqualitas.
	k; *l*: æqualitas.
hypoth.	*e*; *h*: maior, quàm *i*; *s*.
def.17.5	*e*; *f*, +*f*; *g*, +*g*; *h*: maior, quàm *i*; *k*, +*k*; *l*, +*l*; *s*.
constr.	*e*; *f*: *i*; k.
constr.	*g*; *h*: *l*; *s*.
	f; *g*: maior, quàm k; *l*.
	f: maior, quàm *g*.
hypoth.	*n*; *r*: minor, quàm *i*; *s*.
def.17.5	*n*; *o*, +*o*; *p*, +*p*; *r*: minor, quàm *i*; k, +k; *l*, +*l*; *s*.
constr.	*n*; *o*: *i*; k.

p; *r*:

constr.	*p*; *r*: *l*; *s*.
	o; *p*: minor, quàm k; *l*.
	o: minor, quàm *p*.

Constr.

Assumatur alterutra *f* ad *g*, vel *p* ad *o*, minor: & sit assumpta *f* ad *g*. Et inueniatur numerus *t*, pro quo, quadratrix *b* ad quadratricem *c*, sit minor, quàm *f* ad *g*; maior, quàm *g* ad *f*. *58. b.*

Dico, pro *t*, massam *a*, ad massam *d*, minorem esse, quàm *e* ad *h*; & maiorem, quàm *n* ad *r*.

Demonstr.

constr.	*a*; *b*: *e*; *f*.
constr.	*b*; *c*: minor, quàm *f*; *g*.
constr.	*c*; *d*: *g*; *h*.
4. *h*.	*a*; *d*: minor, quàm *e*; *h*. Quod &c.
assumpt.	*f*; *g*: minor, quàm *p*; *o*.
2. *h*.	*g*; *f*: maior, quàm *o*; *p*.
constr.	*b*; *c*: maior, quàm *g*; *f*.
13. 5.	*b*; *c*: maior, quàm *o*; *p*.
constr.	*a*; *b*: *n*; *o*.
constr.	*c*; *d*: *p*; *r*.
4. *h*.	*a*; *d*: maior, quàm *n*; *r*. Quod &c.

Quare &c.

Petrus Mengolus, D. Iacobo Tesino Philosophiæ Doctori S. D.



Ibi primùm ex mea schola, Vir Excellentiss. atque alteri è schola Excellentissimi Cassini, amico nostro Io. Galeatio Manzio, contigit hoc elementum communicari: quod non, sine tuo, atque illius nomine, publicari oportebat; quoniam ipsi mihi tùm placere cæpit, cum vtramque vestrûm obtinuit approbationem. Postulabam honesti furis laudem. quòd, cum huiusmodi contemplationis aliena sit materia, eorum videlicet, quibus logarithmos debemus; cumque aliena sit etiam forma, & contemplationis modus, ipsissimus Euclidis in quinto: meum fecerim ex vtraque compositum. & quemadmodum, præcedentium elementorum in vtraque subiecti, & modi nouitate gloriabar: ita præsentis in vetustate, nouam laudem quærebam. Ille, visis definitionibus, & audita primarum octo propositionum, ex Euclide, traductione fideli; statim om-

nibus

nibus titulis propositionum, à me cursim lectis, & si-ne demonstratione facilem, pro sui acumine ingenij, præstabat assensum: & suggessit, potuisse totam hanc lucubrationem, vnica propositione comprehendi. Quæ demonstrat Euclides in quinto elementorum, de magnitudinibus maioribus, minoribus, æqualibus, æquemultiplicibus, & eamdem, vel maiorem rationem habentibus: posse demonstrari de rationibus altioribus, depressioribus, ęquealtis, ęquemultiplicatis, & eamdem, vel maiorem logarithmicam rationem habentibus. *Cogitabam si possem huiusmodi vti consilio: tibique interim rure superuenienti cœpi communicare. Itaque singulis propositionibus & demonstrationibus, toto animo intendebas, & cum quinto Euclidis diligenter conferebas, cumq; duo inciderimus, in traducendo, difficiliora (vnum,* minoris inæqualitatis rationes, quæ, quò minores sunt, eò altiores dicuntur, pro maioribus magnitudinibus vsuuenire. *alterum*, rationem ex ratione subtrahi, vel decomponi, per suæ compositionem conuersæ:) *intellexi non esse operis dispendium, mutatis mutandis, ex Euclide integram traductionem perficere, & exhibere. Tuque ipse iustum furtum, & honestissimum probasti: quòd non ab*

om.

omnibus facilè probarentur peculiares propositiones, quæ sub illa unica continentur. & certè à me non possent commodè allegari, ad alia in sequentibus elementis demonstranda. Quos ergo semel approbasti labores meos, vt amicis & communices, & commendes, enixè rogo: nam non mihi soli, non paucis, sed omnibus laboro.

Vale.



GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

1. DVarum rationum inæqualitatis, vtrarumque maioris, vel vtrarumque minoris, Altior, dicetur, ab æqualitate remotior.

2. Et Depreſſior, æqualitati propior.

3. Submultiplicata eſt ratio rationis, depreſſior, altioris, cum depreſſior, aliquoties compoſita, facit altiorem.

4. Multiplicata verò altior, depreſſioris; cum depreſſior, aliquoties compoſita, facit altiorem.

5. Ratio logarithmica dicetur, duarum rationum inæqualitatis, vtrarumque maioris, vel vtrarumque minoris, mutua quædam; ſecundùm altitudinem, vel depreſſionem habitudo.

6. Proportio logarithmica, dicetur, ſimilitudo logarithmarum rationum, vel ad inuicem, vel ad alias rationes.

7. Rationem logarithmicam habere inter ſe rationes

dicen-

dicentur, quæ multiplicatæ, possunt se mutuò, altitudine superare.

8. In eadem ratione logarithmicè, dicuntur esse rationes duæ, prima, ad secundam, atque duæ quantitates, prima, ad secundam: cum primæ rationis, quælibet multiplicata ratio, & primæ quantitatis æquemultiplex, à secundæ rationis qualibet multiplicata, & à secundæ quantitatis æquemultiplici, vel vnà deficiunt, vel vnà æquales sunt, vel vnà excedunt; ratio quidem, altitudine, & quantitas ipsâ quantitate.

9. Et dicetur prima ratio ad secundam, proportionalis logarithmicè, sicut prima quantitas ad secundam.

10. Cum verò primæ rationis multiplicata ratio, altior fuerit, quàm multiplicata secundæ; multiplex autem primæ quantitatis, non maior fuerit, quàm multiplex secundæ: dicetur logarithmica ratio rationum, maior, quàm ratio quantitatum.

11. Cumque è contra, multiplex primæ quantitatis, maior fuerit multiplici secundæ; multiplicata autem ratio primæ rationis, non altior, quàm multiplicata, secundæ: dicetur ratio quantitatum, maior, quàm logarithmica ratio rationum.

12. Rursum in eadem ratione logarithmicè, dicentur esse rationes quatuor prima ad secundam, atque tertia ad quartã: cum primæ, ac tertiæ, rationes æquemultiplicatæ, à secundæ, & quartæ, rationibus æquemultiplicatis, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtraque, ab vtraque, vel

vel vnà altiores ſunt, vel vnà æquealtæ, vel vnà depreſſiores, ſi eæ ſumantur, quæ inter ſe reſpondent.

13. Eamdem autem habentes rationem logarithmicam, rationes, logarithmicè proportionales vocentur.

14. Cum verò æquemultiplicatarum, multiplicata primæ rationis altior fuerit, quàm multiplicata ſecundæ; multiplicata autem tertiæ, non altior fuerit, quàm multiplicata quartæ: tunc prima ratio ad ſecundam, maiorem rationem logarithmicam habere dicetur, quàm tertia ad quartam.

15. Homologæ rationes rationibus, aut quantitatibus dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, & conſequentes conſequentibus.

16. Homologia logarithmica eſt ſumptio homologarum rationum, aut & quantitatum, vt in alia quadam logarithmica proportionalitate, fiant homologæ.

17. Alterna ratio logarithmica, eſt rationum ſumptio antecedentis comparatæ ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

18. Inuerſa ratio logaritmica, eſt rationum ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, comparatæ ad antecedentem, velut ad conſequentem.

19. Compoſitio rationis logarithmicæ, eſt ſumptio compoſitæ ex rationibus antecedenti, & conſequenti, ceu vnius ad ipſam conſequentem.

20. Diuiſio rationis logarithmicæ, eſt ſumptio rationis, quacum compoſita conſequens facit antecedentem,

ad ipſam conſequentem.

21. Conuerſio rationis logarithmicæ, eſt ſumptio antecedentis, ad eam, quacum compoſita conſequens facit ipſam antecedentem.

22. Ex æqualitate ratio logarithmica eſt, ſi plures duabus ſint rationes, & his, vel quantitates, vel aliæ rationes, multitudine pares, quæ binæ ſumatur, & in eadem ratione logarithmica: cum vt in primis rationibus, prima logarithmicè ſe habet ad vltimam, ſic in ſecundis vel rationibus, vel quantitatibus, prima ad vltimam ſeſe habuerit. Vel aliter ſumptio extremarum, per ſubductionem mediarum.

23. Ordinata proportio logarithmica eſt, tribus poſitis rationibus, & alijs, vel quantitatibus, vel rationibus, quę ſint his multitudine pares: cum, vt in primis rationibus, logarithmicè ſe habet antecedens, ad conſequentem; ita in ſecundis, vel quantitatibus, vel rationibus, antecedens ad conſequentem: & vt in primis, conſequens, ad aliam quampiam; ſic in ſecundis, conſequens, ad aliã quampiam.

24. Perturbata autem logarithmica proportio eſt: cum vt in primis, logarithmicè ſe habet antecedens, ad conſequentem; ita in ſecundis, antecedens ad conſequentem: & vt in primis, conſequens, ad aliam quampiam; ſic in ſecundis, alia quæpiam, ad antecedentem.

Theor. 1. *Prop.* 1.

SI sint quotcunque rationes, quotcunque rationum, æqualium numero, singulæ singularum æquemultiplicatæ: quàm multiplicata est vna, vnius; tàm multiplicata est composita omnium, compositæ omnium.

Hypoth.

*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*.
*c*3; *d*3: æquemultiplicata *c*; *d*:
Dico *a*3; *b*3, -+ *c*3; *d*3: æquemultiplicatam *a*; *b*, -+ *c*; *d*.

Demonstr.

hypoth.	*a*3; *b*3: *a*; *b*, -+ *a*; *b*, -+ *a*; *b*.
hypoth.	*c*3; *d*3: *c*; *d*; -+ *c*; *d*, -+ *c*; *d*:
p. p.	*a*3; *b*3, -+ *c*3; *d*3: *a*; *b*, -+ *c*; *d*, -+ *a*; *b*, -+ *c*; *d*, -+ *a*; *b*, -+ *c*; *d*.
hypoth.	Multitudo rationum *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*; æqualis est multitudini *c*; *d*, & *c*; *d*, & *c*; *d*: necnon multitudini *a*; *b*, -+ *c*, *d*, & *a*; *b*, -+ *c*; *d*, & *a*; *b*, -+ *c*; *d*.
def. 4. *b.*	*a*3; *b*3, -+ *c*3; *d*3: æquemultiplicata *a*; *b*, -+ *c*; *d*.
	Quod &c.

Quare &c.

Theor. 2. *Prop.* 2.

SI prima ratio, secundæ, fuerit æquemultiplicata, atque prima quantitas, est multiplex secundæ; fuerit autem & tertia ratio, secundæ, æquemultiplicata, atque tertia

quantitas, eſt multiplex ſecundæ: erit compoſita ratio ex prima, & tertia, ſecundæ, æquemultiplicata, atque aggregata quantitas ex prima, & tertia, eſt multiplex ſecundæ.

Hypoth.

*a*2; *b*2: multiplicata *a*; *b*. ſicut 2*c*; *c*, multiplex.
*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c*; *c*, multiplex.
Dico *a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: multiplicatam *a*; *b*. ſicut 2*c* + 3*c*; *c*, multiplicem.

Demonſtr.

hypoth. | *a*2; *b*2: *a*; *b*, + *a*; *b*. ſicut 2*c*: *c* + *c*. Et quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt *c*, & *c*, quantitates.

hypoth. | *a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b* ſicut 3*c*: *c* + *c* + *c*. Et quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt quantitates, *c*, & *c*, & *c*.

p. p. | *a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*. ſicut 2*c* + 3*c*: *c* + *c* + *c* + *c* + *c*. & quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*; & *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt quantitates, *c*, & *c*, & *c*, & *c*, & *c*.

def.4.h. | *a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*: ſicut 2*c* + 3*c*; *c*, multiplex. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

SI prima ratio, ſecundæ, æquèfuerit multiplicata, atque tertia, quartæ; fuerit autem & quinta; ſecundæ,

dæ, æquemultiplicata, atque sexta, quartæ: erit & composita ex prima, & quinta, secundæ æquemultiplicata, atq; composita ex tertia, & sexta, quartæ.

Hypoth.

$a2; b2$: multiplicata $a; b$. sicut $c2; d2$: multiplicata $c; d$.

$a3; b3$: multiplicata $a; b$. sicut $c3; d3$: multiplicata $c; d$.

Dico $a2; b2, +a3; b3$: multiplicatam $a; b$. sicut $c2; d2, +c3; d3$: multiplicatam $c; d$.

Demonstr.

hypoth. | $a2; b2$: $a; b, +a; b$. sicut $c2; d2$: $c; d, +c; d$. Et quot sunt $a; b$, & $a; b$: tot sunt $c; d$, & $c; d$.

hypoth. | $a3; b3$: $a; b, +a; b, +a; b$. sicut $c3; d3$: $c; d, +c; d, +c; d$. Et quot sunt $a; b$, & $a; b$, & $a; b$: tot sunt $c; d$, & $c; d$, & $c; d$.

p. p. | $a2; b2, +a3; b3$: $a; b, +a; b, +a; b, +a; b, +a; b$. sicut $c2; d2, +c3; d3$: $c; d, +c; d, +c; d, +c; d, +c; d$. Et quot sunt $a; b$, & $a; b$, & $a; b$, & $a; b$, & $a; b$: tot sunt $c; d$, & $c; d$, & $c; d$, & $c; d$, & $c; d$.

def. 4. h. | $a2; b2, +a3; b3$: multiplicata $a; b$. sicut $c2; d2, +c3; d3$: multiplicata $c; d$. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 4. Prop. 4.

SI prima ratio, secundæ æquemultiplicata fuerit, atque prima quantitas, secundæ; sumantur autem ratio, & quantitas; & sumpta ratio, sit ęquemultiplicata primæ rationis, atque sumpta quantitas, multiplex primæ quantitatis: erit & ex æquo, sumpta ratio, ęquemultiplicata secundæ rationis, atque sumpta quantitas, secundæ quantitatis.

Hypoth.

*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. sicut 3*c*; *c*, multiplex.

*a*6; *b*6: multiplicata *a*3; *b*3. sicut 6*c*; 3*c*, multiplex.

Dico *a*6; *b*6: multiplicatam *a*; *b*. sicut 6*c*; *c*, multiplicem.

Demonstr.

hypoth. | *a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. sicut 3*c*; *c*, multiplex:

2. *h.* | *a*3; *b*3, + *a*3, *b*3: multiplicata *a*; *b*. sicut 3*c* + 3*c*; *c*, multiplex.

hypoth. | *a*6; *b*6: *a*3; *b*3, + *a*3; *b*3. sicut 6*c*: 3*c* + 3*c*. Et quot sunt, *a*3; *b*3, & *a*3; *b*3: tot sunt 3*c*, & 3*c*.

| *a*6; *b*6: multiplicata *a*; *b*. sicut 6*c*; *c*, multiplex. Quod &c. Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

SI prima ratio, secundæ æquemultiplicata fuerit, atque tertia, quartæ; sumantur autem æquemultiplicatæ rationes,

tiones, primæ, & tertiæ: erit & ex æquo, sumptarum vtraque, vtriusque, æquemultiplicata; altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

Hypoth.

*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. sicut *c*3; *d*3: multiplicata *c*; *d*.

*a*6; *b*6: multiplicata *a*3; *b*3. sicut *c*6; *d*6: multiplicata *c*3; *d*3.

Dico *a*6; *b*6: multiplicatam *a*; *b*. sicut *c*6; *d*6: multiplicatam *c*; *d*.

Demonstr.

hypoth. | *a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. sicut *c*3; *d*3: multiplicata *c*; *d*.

3. *b.* | *a*3; *b*3,+*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. sicut *c*3; *d*3,+*c*3; *d*3: multiplicata *c*; *d*.

hypoth. | *a*6; *b*6: *a*3; *b*3,+*a*3; *b*3. sicut *c*6; *d*6: *c*3; *d*3,+*c*3; *d*3. Et quot sunt *a*3; *b*3, & *a*3; *b*3: totidem sunt *c*3; *c*3, & *c*3; *d*3.

| *a*6; *b*6: multiplicata *a*; *b*. sicut *c*6; *d*6: multiplicata *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 6. Propos. 6.

SI fuerint, in eadem ratione logarithmica, prima ratio, ad secundam, atque prima quantitas, ad secundam: etiam multiplicata primæ rationis, & æquemultiplex primæ quantitatis, ad multiplicatam, secundæ rationis, & æque-

æquemultiplicem secundæ quantitatis, in eadem erunt logarithmica ratione.

Hypoth.

Sint rationes *A*, & *B*; & quantitates *a*, & *b*: & sit ratio *A*, ad rationem *B*, logarithmicè; sicut quantitas *a*, ad quantitatem *b*. Sitque ratio 3*A*, multiplicata rationis *A*; sicut quantitas 3*a*, multiplex quantitatis *a*: item ratio 4*B*, multiplicata rationis *B*; sicut quantitas 4*b*, multiplex quantitatis *b*.

Dico rationem 3*A*, ad rationem 4*B*, esse logarithmicè sicut quantitas 3*a*, ad quantitatem 4*b*.

Præpar.

Accipiatur ratio 6*A*, multiplicata rationis 3*A*; & quantitas 6*a*, æquemultiplex quantitatis 3*a*: item ratio 20*B*, multiplicata rationis 4*B*; & quantitas 20*b*, ęquemultiplex quantitatis 4*b*.

Demonstr.

4. *b.* Ratio 6*A*, æquemultiplicata est rationis *A*; atque quantitas 6*a*, multiplex est quantitatis *a*. item ratio 20*B*, æquemultiplicata est rationis *B*; atque quantitas 20*b*, multiplex est quantitatis *b*. Sunt autem rationes *A* ad *B* logarithmicè, sicut quantitates *a* ad *b*. Ergo si ratio 6*A*, est altior ratione 20*B*; etiam quantitas 6*a*, maior est quantitate 20*b*: si ęquealta; æqualis: si depressior; minor. Sed est ratio 6*A*, æquemultiplicata rationis 3*A*; atque quantitas 6*a*, multiplex

(margin: *hypoth.*, *def.8.b.*, *constr.*)

tiplex quantitatis 3*a*: & ratio 20*B*, rationis 4*B*, æquemultiplicata eſt; atque quantitas 20*b*, quan-
def.8.h. titatis 4*b*. Ergo rationes 3*A*, ad 4*B*, ſunt logarithmicè; ſicut quantitates, 3*a*, ad 4*b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

SI prima ratio, ad ſecundam, eamdem habuerit rationem logarithmicè, atque tertia, ad quartam: etiam æquemultiplicatæ rationes primæ, & tertiæ, ad æquemultiplicatas ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eamdem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

Hypoth.

Sunto rationes quatuor *A* ad *B*, & *C* ad *D*, logarithmicè proportionales: & ſunto ipſarum *A*, *C*, æquemultiplicatæ rationes 3*A*, 3*C*: necnon ipſarum *B*, *D*, æquemultiplicatæ, 4*B*; 4*D*.

Dico quatuor rationes 3*A* ad 4*B*, & 3*C* ad 4*D*, logarithmicè proportionales eſſe.

Præpar.

Sumantur ipſarum 3*A*, 3*C*, æquemultiplicatæ rationes 6*A*, 6*C*: & ipſarum 4*B*, 4*D*, æquemultiplicatæ, 20*B*, 20*D*.

Demonſt.

4. h. Rationes 6*A*, 6*C*, æquemultiplicatæ ſunt rationum, *A*, *C*: & 20*B*, 20*D*, æquemultiplicatæ

 ſunt

hypoth. sunt rationum B, D. suntque A ad B, logarithmicè proportionales, vt C ad D. Ergo si $6A$, altior est, quàm $20B$; etiam $6C$, altior est, quàm $20D$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Et sunt $6A$, $6C$, ipsarum $3A$, $3C$, æquemultiplicatæ; necnon $20B$, $20D$, ipsarum $4B$, $4D$, ęquemultiplicatæ. Ergo $3A$ ad $4B$, & $3C$ ad $4D$, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

def.12.b

hypoth.

def.12.b

Quare &c.

Theor. 8. Prop.

SI fuerint duæ rationes, singulæ, ex binis compositæ, altiores, ex depressioribus, & quodammodo totæ, ex abscissa, & residua: fuerit autem vna tota ratio, ad alteram totam, æquemultiplicata; atque sua abscissa, ad alterius abscissam: erit & æquemultiplicata; atque sua residua, ad alterius residuam.

Hypoth.

Ratio $A+B$, ex rationibus A, & B, altior, ex depressioribus, componitur; item $C+D$ ratio, ex rationibus C, & D, componitur: & esto $A+B$, ad $C+D$, æquemultiplicata, atque A ad C.

Dico $A+B$ ad $C+D$, æquemultiplicatam etiam esse, atque B ad D.

Præpar.

Fiat ratio G ad D, æquemultiplicata, atque A ad C.

De-

Demonstr.

p. h.	$A+G$ ad $C+D$, æquemultiplicata eſt, atque A ad C.
hypoth.	$A+B$ ad $C+D$, æquemultiplicata eſt, atque A ad C.
p. p.	$A+B$ ratio, eadem eſt, quæ $A+G$.
	Et compoſita vtrimque conuerſa rationis A,
p. p.	B ratio, eadem eſt, quæ G.
p. p.	B ad D, æquemultiplicata eſt, atque A ad C.
p. h.	$A+B$ ad $C+D$, æquemultiplicata eſt, atque B ad D. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Prop. 9.

SI ratio, & quantitas, cuiuſdam rationis, & cuiuſdam quantitatis, æquè ſint multiplicata, & multiplex; & abſciſſa ratio, & abſciſſa quantitas, eiuſdem rationis, & eiuſdem quantitatis, æquè ſint multiplicata, & multiplex: reſidua ratio, & reſidua quantitas, eiuſdem rationis, & eiuſdem quantitatis, vel ſunt æquealta, & æqualis; vel æquè ſunt multiplicata, & multiplex.

Hypoth.

Ratio $A+B$, rationis C, æquemultiplicata eſt, atque quantitas $a+b$, multiplex quantitatis c; & ratio A, rationis C, æquemultiplicata eſt, atque quantitas a, multiplex quantitatis c.

Dico quòd, vel B æquealta eſt ipſi C; ſicut b, æqualis ipſi c: vel B æquemultiplicata eſt ipſius C; ſicut b mul-

multiplex ipsius *c*.

Demonstr.

hypoth. Numerus rationum *C*, ex quibus *A+B* componitur, idem est qui quantitatum *c*, ex quibus *a+b* colligitur: item numerus rationum *C* ex quibus *A* componitur, idem est qui quantitatum *c*, ex quibus *a* componitur. Quorum numerorum, vel est differentia vnitas, vel numerus.

Si vnitas est differentia; vna est ratio *C*, quacum composita ratio *A*, facit rationem *A+B*; & vna est quantitas *c*, quacum composita quantitas *a*, facit quantitatem *a+b*. Sed & *B* ratio est, quacum composita *A*, facit rationem *A+B*; & *b* quantitas est, quacum composita *a*, facit quantitatem *a+b*. Ergo *B* ęquealta est ipsi *C*; atque *b* æqualis ipsi *c*. *hypoth.*

Si verò numerus est differentia, tot sunt rationes *C*, quibuscum composita ratio *A*, facit rationem *A+B*; totidemque sunt quantitates *c*, quibus cum composita quantitas *a*, facit quantitatem *a+b*. Sed *B* ratio est, quacum composita ratio facit rationem *A+B*; & *b* quantitas, quacum composita quantitas *a*, facit quantitatem *a+b*. Ergo quot ex *C* rationibus componitur *B*; tot ex *c*, quantitatibus componitur *b*. Ergo *B* ad *C*, æquemultiplicata est, atque *b* ad *c*, multiplex. Ergo *B* ad *C*, vel æquealta est: atque *hypoth.* *def.4.b.*

b ad

b ad *c*, æqualis: vel æquemultiplicata eſt; atque multiplex. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 10. *Prop.* 10.

SI duæ rationes, duarum rationum, ſint æquemultiplicatæ; & abſciſſæ quædam, ſint earumdem æquemultiplicatæ: & reſiduæ, eiſdem, aut æquealtæ ſunt, aut æquemultiplicatæ.

Hypoth.

Ratio $A+B$, rationis C, æquemultiplicata eſt, atque ratio $D+E$, rationis F; & ratio A, rationis C, æquemultiplicata eſt, atque ratio D, rationis F.

Dico rationem B rationis C, æquealtam eſſe, atque ratio E rationis F; vel æquemultiplicatam.

Demonſtr.

hypoth. Quot ex C rationibus, ratio $A+B$ componitur, idem numerus eſt, indicans etiam, quot ex F rationibus, componitur ratio $D+E$. & quot ex C rationibus, ratio A componitur, idem numerus eſt, indicans etiam, quot ex F rationibus, ratio D componitur: quorum numerorum vel eſt differentia vnitas, vel numerus.

Si vnitas eſt differentia: vna eſt ratio C, quacum compoſita ratio A, facit rationem $A+B$; & vna eſt ratio F, quacum compoſita ratio D, facit rationem $D+E$. Sed & B cum A, & E cum *hypoth.*

D, fa-

D, faciunt rationes compositas *A+B*, & *D+E*. Ergo *B* ad *C* eadem est, & æquealta, atque ratio *E* ad *F*. si enim binæ non essent æquealtę; esset vna binarum, æqualitati propior, quàm altera, & non essent eędem inter se.

Si verò numerus est differentia: totidem sunt rationes *C*, quibuscum ratio *A* composita, facit *A+B* rationem; quot etiam rationes *F*, quibuscum ratio *D* composita, facit *D+E* rationem.

hypoth. Sed & *B* cum *A*, & *E* cum *D*, faciunt rationes

def.4.h. compositas *A+B*, & *D+F*. Ergo *B* ad *C* ęquemultiplicata est, atque *E* ad *F*. Ergo *B* ad *C*, vel æquęalta est, vel æquemultiplicata, atque *E* ad *F*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 11. *Propos.* 11.

ÆQuealtæ, ad eamdem, eamdem habent rationem logarithmicam: & eadem, ad ęquealtas.

Hypoth.

Rationes *A*, & *B* sunt æquealtæ.

Dico *A* rationem, ad *C*, esse logarithmicè, vt *B*, ad *C*. Et *C* rationem, ad *A*, esse logarithmicè, vt *C*, ad *B*.

Præpar.

Sumantur ipsarum *A*, *B*, æquemultiplicatæ rationes *D*, *E*: & sumatur *F* ratio multiplicata, rationis *C*.

De-

Demonstr.

def.5.b. Quoniam *A* ad *C*, ratio est logarithmica; cuius inæqualitatis est ratio *C*, eiusdē est & *A*: item quoniam *B* ad *C*, ratio est logarithmica; cuius inæqualitatis est *C*, eiusdem est & *B*: ergo *A*, *B* rationes, eiusdem inter se sunt inæqualitatis: & sunt *A*, *B* æquealtæ: ergo sunt eædem inter se. si enim non essent eædem inter se, esset vna remotior ab ęqualitate, quàm altera, & non essent ęquealtæ. Sumptæ autem sunt *D*, *E* æquemultiplicatæ rationum *A*, *B* earumdem inter se: ergo

p. p. etiam *D*, *E*, sunt eædem inter se rationes, & æquealtę. Ergo si *D* est altior, quàm *F*, etiam *E* altior est, quàm *F*: si æquealta; æquealta: si de-

def.12.b pressior; depressior. Ergo ratio *A* ad *C*, est logarithmicè, sicut ratio *B* ad *C*. Quod &c. Necnon ratio *C* ad *A*, est logarithmicè, sicut *C* ad *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 12. Prop. 12.

Rationum non æquealtarum, altior ad eandem, maior est logarithmicè, quàm depressior: & eadem ad depressiorem, maior est logarithmicè, quàm ad altiorem.

Hypoth.

Esto ratio *A+B* altior, quàm *B*.

Dico *A+B*, ad *C*, maiorem esse logarithmicè, quàm *B*, ad *C*. Et

Et *C*, ad *B*, maiorem logarithmicè, quàm *C*, ad *A+B*.

Præpar. & Demonstr.

Sumatur *A* ratio, quæ cum *B*, componit rationem *A+B*: & duarum rationum *A*, *B*, sumatur altera non altior, quæ sit *A*: & rationis *A*, totuplicata *D*, quoties oportet, vt fiat altior, quàm *C*; & rationis *B*, æquemultiplicata sumatur *E*.

def.7.h.

Quoniam *A*, non est altior, quàm *B*; & *D*, *E* sunt æquemultiplicatæ ipsarum *A*, *B*: oportet *D* non esse altiorem, quàm *E*. si enim esset altior; ex ijsdem, vel ex propioribus æqualitati, vtrisq; maioris, vel vtrisque minoris inęqualitatis rationibus, esset remotior ab ęqualitate ratio composita. ergo *D*, est altior, quàm *C*: ergo *E*, est altior, quàm *C*.

cōtra p. p. & p. 3.

Sumatur ipsius *C*, bis, ter, quater, vel deinceps, quoties oportet, multiplicata ratio *F*, vt fiat primò altior quàm *E*. Quare ratio *F*, non est altior, quàm ratio *E+C*: est autem *D* altior, quàm *C*: ergo *D+E* altior est, quàm *E+C*. alioquin ex remotioribus ab æqualitate rationibus, vtrisque maioris, vel vtrisque minoris inæqualitatis, non altior fieret composita ratio, ideoque non remotior ab æqualitate, *contra p. p. & p.* 3. Sed *F*. non est altior, quàm *E+C*: ergo *D+E*, est altior, quàm *F*: & est *E* depressior, quàm *F*: & sunt *D*, *E* rationes æquemultiplicatæ, rationum *A*, *B*: & *D+E* ratio, est ęquemultiplicata, rationis *A+B*:

def.7.b.

p. h.

Ergo

def.14.b Ergo $A+B$ ratio, ad rationem C, maior est logarithmicè, quàm B ad C. Quod &c. Et ratio
def.14.b C, ad rationem B, maior est logarithmicè, quàm C, ad $A+B$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. *Prop.* 13.

QVæ, ad eamdem, eamdem habent rationem logarithmicam; inter se sunt eædem rationes logarithmicę: & ad quas eadem, eamdem habet logarithmicam; inter se sunt eædem rationes logarithmicæ.

Hypoth. 1.

Ratio A ad rationem C, esto logarithmicè, sicut ratio B ad rationem C.

Dico rationes A, B, esse easdem inter se.

Demonstr.

Quoniam A ad C, & B ad C, sunt rationes
def.5.b. logarithmicæ; cuius inęqualitatis est C ratio, maioris, vel minoris; eiusdem sunt A, & B rationes: quæ si non eædem essent inter se, non essent æquealtæ: & assignaretur earum altera altior. Assignetur
12. b. A, si fieri potest, altior, quàm B: ergo A ad C, maior est logarithmicè, quàm B. *contra hypoth.* Ergo rationes A, B, sunt eædem inter se. Quod &c.

Hypoth. 2.

Ratio C, ad rationem A, esto logarithmicè, sicut ratio C, ad rationem B.

Dico rationes *A*, *B*, esse easdem inter se.

Demonstr.

12. *b.* Assignetur *A*, si fieri potest depressior, quàm *B*: Ergo *C* ad *A*, maior est logarithmicè, quàm ad *B*: *contra hypoth.* Ergo *A* non est depressior, quàm *B*: item demonstrabitur, quod neque *B*
11. *b.* est depressior, quàm *A*: sunt ergo *A*, *B* rationes æquealtæ, & eædem inter se. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 14. *Prop.* 14.

Rationum, ad eamdem rationem, quæ maior est logarithmicè, illa est altior: & ad quàm, eadem maior est logarithmicè, illa est depressior.

Hypoth. 1.

Ratio *A*, maior est logarithmicè ad *C*, quàm *B*.

Dico *A*, altiorem esse, quàm *B*.

Demonstr.

Esto *A* non altior, quàm *B*, si fieri potest: erit itaque vel æquealta, vel depressior. Sunto *A*, *B*
11. *b.* æquealtæ, si fieri potest. Ergo *A* ad *C*, est logarithmicè, sicut *B*. *contra hypoth.* Esto *A* depres-
12. *b.* sior, quàm *B*, si fieri potest. Ergo *B* ad *C*, minor est logarithmicè, quàm *A*. *contra hypoth.* Ergo *A*, non est æquealta, neque depressior, quàm *B*: ergo est altior. Quod &c.

Hy-

Hypoth. 2.

Ratio *C* ad *A*, maior est logarithmicè, quàm ad *B*.

Dico *A*, depressiorem esse, quàm *B*.

Demonstr.

Esto *A* non depressior, quàm *B*, si fieri potest: erit itaque vel æquealta, vel altior. Sunto *A*; *B*
11. *h.* æquealtæ, si fieri potest. Ergo *C* ad *A*, est logarithmicè, sicut ad *B*. *contra hypoth.* Esto *A* altior,
12. *h.* quàm *B*, si fieri potest. Ergo *C* ad *A*, minor est logarithmicè, quàm ad *B*. *contra hypoth.* Ergo *A* non est æquealta, neque altior, quàm *B*: ergo est depressior. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 15. *Prop.* 15.

QVæ eidem sunt eædem rationes, inter se sunt eędem, tùm logarithmicè, tùm absolutè.

Hypoth. 1.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè sunt, vt quantitates *c* ad *d*: & *c* ad *d* quantitates, vt quantitates *e* ad *f*.

Dico rationes *A* ad *B*, logarithmicè esse, sicut quantitates *e* ad *f*.

Hypoth. 2.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè sunt, vt quantitates *c* ad *d*: & *c* ad *d* quantitates, sunt sicut logarithmicè rationes *E* ad *F*.

Dico rationes *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut rationes *E* ad *F*.

Hypoth. 3.

Quantitates *a* ad *b*, ſunt inter ſe, ſicut logarithmicè, rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè ſunt, ſicut quantitates *e* ad *f*.

Dico *a* ad *b*, eſſe vt *e* ad *f*.

Hypoth. 4.

Quantitates *a* ad *b*, ſunt inter ſe, ſicut logarithmicè, rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè ſunt, vt rationes *E* ad *F*.

Dico quantitates *a* ad *b* eſſe, ſicut logarithmicè, rationes *E* ad *F*.

Hypoth. 5.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè ſunt, vt rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè, vt rationes *E* ad *F*.

Dico rationes *A* ad *B* logarithmicè eſſe, ſicut rationes *E* ad *F*.

Præpar. comm.

Sumantur ipſarum rationum, vel quantitatum *A*, *C*, *E*, æquemultiplicatæ, & æquemultiplices, 3*A*, 3*C*, 3*E*: necnon ipſarum *B*, *D*, *F*, æquemultiplicatæ, & æquemultiplices, 4*B*, 4*D*, 4*F*.

Demonſtr. comm.

def. 8. vel 12. h. vel 65. Si 3*A*, altior eſt, vel maior, quàm 4*B*; etiam 3*C*, altior eſt, vel maior, quàm 4*D*. Quod ſi 3*C*, altior eſt, vel maior, quàm 4*D*; etiam 3*E* altior eſt, vel maior, quàm 4*F*. Ergo ſi 3*A* altior eſt,

vel

vel maior, quàm $4B$; etiam $3E$ altior est, vel maior, quàm $4F$. Item si æquealta, vel æqualis; etiam æquealta, vel æqualis: si depressior, vel minor; etiam depressior, vel minor. Ergo proportionales sunt siue rationes, siue quantitates, vel mixtim A ad B, sicut E ad F: tùm logarithmicè, siquæ sunt rationes; tùm absolutè, si nullæ sunt rationes, sed solùm quantitates. Quod &c.

def 8 vel 12. h. vel 6. 5.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

SI sint quotcunque rationes logarithmicè proportionales, quemadmodum se habuerit logarithmicè vna antecedentium ad vnam consequentium; ita logarithmicè se habebit composita ex omnibus antecedentibus, ad compositam ex omnibus consequentibus.

Hypoth.

Rationes A ad B, & C ad D, & E ad F, sunt logarithmicè proportionales. Ex rationibus A, C, & E composita est $A+C+E$: & ex rationibus B, D, & F composita est $B+D+F$.

Dico $A+C+E$ ad $B+D+F$, & A ad B, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum A, C, E sumantur æquemultiplicatæ rationes $3A$, $3C$, $3E$: ex quibus composita ratio $3A+3C+3E$. Item rationum B, D, F, sumantur æquemultiplicatæ

catæ rationes $4B$, $4D$, $4F$: ex quibus composita ratio $4B+4D+4F$.

Demonstr.

def.12.h Quoniam A ad B, & C ad D, sunt logarithmicè proportionales: si $3A$ altior est, quàm $4B$; etiam $3C$ altior est, quàm $4D$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Item quoniam C ad D, & E ad F, sunt logarithmicè proportionales: si $3C$ altior est, quàm $4D$; etiam $3E$, altior est, quàm $4F$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo si $3A$, altior est, quàm $4B$: etiam $3A+3C+3E$ altior est quàm $4B+4D+4F$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. p. h. & est $3A+3C+3E$ ad $A+C+E$, totuplicata, quotuplicata est $3A$ ad A: item $4B+4D+4F$, ad $B+D+F$. totuplicata est, quotuplicata $4B$ ad B. def.12.h Ergo $A+C+E$ ad $B+D+F$, & A ad B, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 17. Propos. 17.

SI sex vel rationum, vel & quantitatum mixtim, prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: tertia verò ad quartam maiorem habuerit, quàm quinta ad sextam: etiam prima ad secundam, maiorem habebit, quàm quinta ad sextam.

Hy-

Hypoth. 1.

Quantitates *a* ad *b*, & *c* ad *d*, ſunt proportionales: ſed quantitatum *c* ad *d* ratio, maior eſt, quàm logarithmica, *E* ad *F* rationum.

Dico quantitatum *a* ad *b* rationem maiorem eſſe, quàm logarithmica *E* ad *F* rationum.

Hypoth. 2.

Quantitates *a* ad *b*, & rationes *C* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales: ſed rationum logarithmica ratio *C* ad *D*, maior eſt quàm quantitatum *e* ad *f*.

Dico *a* ad *b* maiorem eſſe, quàm *e* ad *f*.

Hypoth. 3.

Rationes *A* ad *B*, & quantitates *c* ad *d*, ſunt logarithmicè proportionales: ſed quantitatum ratio *c* ad *d*, maior eſt, quàm *e* ad *f*.

Dico rationum logarithmicam *A* ad *B*, maiorem eſſe, quàm *e* ad *f*.

Hypoth. 4.

Quantitates *a* ad *b*, & rationes *C* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales: ſed rationum *C* ad *D* logarithmicè maior eſt, quàm *E* ad *F*.

Dico quantitatum *a* ad *b* rationem maiorem eſſe, quàm rationum logarithmica *E* ad *F*.

Hypoth. 5.

Rationes *A* ad *B*, & quantitates *c* ad *d* ſunt proportionales logarithmicè: ſed quantitatum *c* ad *d*, maior eſt rato, quàm logarithmica rationum *E* ad *F*.

Dico

Dico *A* ad *B*, maiorem esse logarithmicè, quàm *E* ad *F*.

Hypoth.6.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D* sunt proportionales: sed *C* ad *D* ratio, logarithmicè maior est, quàm *e* ad *f*.

Dico rationum *A* ad *B* logarithmicam rationem, maiorem esse, quàm quantitatum *e* ad *f*.

Hypoth.7.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt proportionales: sed *C* ad *D* rationum ratio logarithmicè maior est quàm *E* ad *F* ratio logarithmica.

Dico *A* ad *B* logarithmicè maiorem esse, quàm *E* ad *F*.

Præpar. comm.

Sumantur æquemultiplicatę rationum rationes, & ęquemultiplices quantitatum quantitates; antecedentium *A*, *C*, *E*, antecedentes 3*A*, 3*C*, 3*E*; & consequentium *B*, *D*, *F* consequentes 4*B*, 4*D*, 4*F*: secundum eas multiplicationes; quibus 3*C*, altior quidem est, vel maior, quàm 4*D*; sed 3*E*, non altior, vel non maior est, quàm 4*F*.

Demonstr. commun.

def. 8. vel 12. h. vel 6. 5. def. 10. vel 11. vel 14. h vel 8. 5.

Quoniam 3*C* est altior, vel maior, quàm 4*D*: ergo etiam 3*A* est altior, vel maior, quàm 4*B*: & interim 3*E* non altior est, vel non maior, quàm 4*F*. ergo *A* ad *B*, maior est, quàm *C* ad *D*, siuè logarithmicè, siuè absolutè. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 18. Prop. 18.

RAtionum logarithmicè proportionalium, si prima fuerit altior, quàm tertia: erit & secunda altior, quàm quarta: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior.

Hypoth. commun.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Altior est ratio *A*, ratione *C*.

Dico, quòd altior est ratio *B*, ratione *D*.

Demonstr.

Esto, si fieri potest, non altior *B* ratio, quàm *D*: ergo vel est æquealta, vel depressior. Esto si
12. *h.* fieri potest æquealta. Ergo *A* ad *B*, maior est
11. *h.* logarithmicè, quàm *C* ad *B*: sed *C* ad *B* eadem
17. *h.* est logarithmicè, quæ *C* ad *D*. Ergo *A* ad *B* maior est logarithmicè quàm *C* ad *D*, *contra hypoth.* Non sunt ergo *B*, *D* rationes æquealtæ.

12. *h.* Esto, si fieri potest, *B* depressior, quàm *D*. Ergo *C* ad *B*, maior est logarithmicè, quàm *C* ad
hypoth. *D*. Sed *A* ad *B*, est logarithmicè, vt *C* ad *D*. Er-
17. *h.* go *C* ad *B*, maior est logarithmicè, quàm *A* ad
14. *h.* *B*. Ergo *C* altior est, quàm *A*. *contra hypoth.* Non est ergo *B* depressior, quàm *D*; neque æquealta: ergo *B* est altior, quàm *D*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ ſunt rationes *A*, *C*.

Dico quòd & æquealtæ ſunt rationes *B*, *D*.

Demonſt.

Sunto *B*, *D* non æquealtæ, ſi fieri poteſt: &
12. *h.* eſto *B* altior, quàm *D*. Ergo *C* ad *D*, maior
hypoth. eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Sed *A* ad *B*, ea-
17. *h.* dem eſt logarithmicè, quæ *C* ad *D*. Ergo *A* ad
14. *h.* *B*, maior eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Ergo *A*, altior eſt, quàm *C*. *contra hypoth.* Sunt ergo *B*, *D* æquealtæ. Quod &c.

Hypoth.

Depreſſior eſt *A*, quàm *C*.

Dico quòd & *B* depreſſior eſt, quàm *D*.

Demonſtr.

hypoth. Altior eſt *C* quàm *A*: & eſt *C* ad *D* logari-
ſup. thmicè, vt *A* ad *B*: ergo altior eſt *D*, quàm *B*:
def. 2. *h.* ergo depreſſior eſt *B*, quàm *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 19. *Prop.* 19.

SVbmultiplicatæ rationes, cum pariter multiplicatis, in eadem ſunt ratione logarithmica, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

Rationũ *A*, *B*, ſunt æquemultiplicatę rationes 3 *A*, 3 *B*.

Dico *A* ad *B*, atque 3 *A* ad 3 *B*, eſſe logarithmicè proportionales. *De-*

Demonstr.

Rationes *A* ad *B*, & *A* ad B, & *A* ad B, quot-
16. *h.* cunque oportet, acceptæ, sunt proportionales: ergo ex antecedentibus composita 3*A*, ad ex consequentibus compositam 3B, est logarithmicè, vt *A* ad B. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. Prop. 20.

RAtiones logarithmicè proportionales, permutando, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth.

Sint rationes logarithmicè proportionales, *A* ad B, vt *C* ad *D*.

Dico permutando, esse logarithmicè proportionales, *A* ad *C*, vt B ad *D*.

Præpar.

Rationum *A*, *B*, sumantur æquemultiplicatę 3*A*, 3B: & rationum *C*, *D*, æquemultiplicatæ 2*C*, 2*D*.

Demonstr.

19. *h.* Rationes 3*A* ad 3*B*, & *A* ad *B*, sunt lo-
hypoth. garithmicè proportionales. item *A* ad *B*, & *C*
19. *h.* ad *D*. item *C* ad *D*, & 2*C* ad 2*D*. Ergo
15. *h.* 3*A* ad 3*B*, & 2*C* ad 2*D* sunt logarithmicè
18. *h.* proportionales. Ergo si 3*A*, est altior, quàm 2*C*; etiam 3*B*, est altior, quàm 2*D*: si æque-
def.12.h alta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo *A*

 ad *C*,

ad C, & B ad D, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. *Prop.* 21.

Rationes inter se, vel & cum quantitatibus, logarithmicè proportionales, diuidendo, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Rationes $A+B$ ad B, & $C+D$ ad D, sunt logarithmicè proportionales.

Dico diuidendo rationes A ad B, & C ad D, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Sumantur ipsarum A, B, C, D, æquemultiplicatæ $3A$, $3B$, $3C$, $3D$: necnon ipsarum C, D, aliæ quælibet æquemultiplicatæ $4C$, $4D$.

Demonstr.

Rationes $3A$, $3B$, æquemultiplicatæ sunt ra-
p. h. tionum A, B: Ergo ratio $3A+3B$ totuplicata
constr. est rationis $A+B$, quotuplicata est $3A$ ipsius
p. h. A: necnon $3C$, & $3D$ ipsarum C, & D: necnon ratio $3C+3D$ rationis $C+D$.

constr. Rationes quoque $3C$, $3D$, rationum C, D; & rationes $4C$, $4D$, earumdem C, D ratio-
3. h. num sunt æquemultiplicatæ: ergo etiam $7C$, $7D$, earumdem C, D rationum sunt æquemultiplicatæ. Et

hypoth. Et quoniam rationes $A+B$ ad B, & $C+D$ ad D, sunt logarithmicè proportionales: si $3A+3B$, altior est, quàm $7B$; etiam $3C+3D$, altior est, quàm $7D$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior.
def.12.b

Sed si $3A$ altior est, quàm $4B$; adcomposita communi ratione $3B$; etiam $3A+3B$ altior est, quàm $7B$. nam eiusdem maioris, vel eiusdem minoris inæqualitatis, ex remotioribus rationibus ab æqualitate, composita ratio, est remotior; & ex propioribus, propior. & ostensum est, quòd si $3A+3B$, altior est quàm $7B$; etiam $3C+3D$, altior est, quàm $7D$: & seposita communi ratione $3D$; altior est $3C$, quàm $4D$. nam si $3C$, non esset altior, quàm $4D$: composita, $3D$; fieret ratio $3C+3D$, non altior, quàm $7D$. *contra superiùs probata*.
4. 3.
4. 3.

Ergo si $3A$ altior est, quàm 4B, etiam $3C$ altior est, quàm $4D$: similiter ostendetur, si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo A ad B, est logarithmicè, vt C ad D. Quod &c.
def.12.b

Hypoth.2.

Rationes $A+$B ad B, & quantitates $a+b$ ad b, sunt logarithmicè proportionales.

Dico diuidendo, rationes A ad B, & quantitates a ad b esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum A, B, & quantitatum a, b, ſumantur ęquemultiplicatę rationes $3A$, $3B$, & æquemultiplices quantitates $3a$, $3b$. item rationis B, & quantitatis b, multiplicata ratio $4B$, & æquemultiplex quantitas $4b$.

Demonſtr.

p. h. Ratio $3A+3B$, totuplicata eſt rationis $A+B$, *conſtr.* quotuplicata eſt $3A$, ipſius A; & quantitas $3a$, *p. 5.* quantitatis a; & quantitas $3b$, quantitatis b; & quantitas $3a+3b$, quantitatis $a+b$.

conſtr. Quantitates quoque $3a$, $3b$, quantitatum a, b; & quantitates $4a$, $4b$, earumdem a, b, ſunt *2. 5.* æquemultiplices: ergo $7a$, $7b$, earumdem a, b, ſunt æquemultiplices.

hypoth. Et quoniam rationes $A+B$ ad B, & quantitates $a+b$ ad b, ſunt logarithmicè proportiona- *def. 8. h.* les: ſi $3A+3B$, altior eſt, quàm $7B$; etiam $3a+3b$, maior eſt, quàm $7b$: ſi æquealta; æqualis: ſi depreſſior; minor.

ſup. Sed ſi $3A$, altior eſt, quàm 4B; etiam $3A+3$B, altior eſt, quàm 7B: & ſi $3a+3b$, maior eſt, quàm $7b$; etiam, dempta communi $3b$, relinquitur $3a$, maior quàm $4b$. Ergo ſi $3A$, altior eſt, quàm $4B$; etiam $3a$, maior eſt, quàm $4b$: & ſimiliter oſtendetur, ſi æquealta; æquali: ſi de- *def. 8. h.* dreſſior; minor. Ergo rationes A ad B, & quantitates a ad b, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c. Quare &c.

Theor. 22. *Prop.* 22.

Rationes inter se, vel & cum quantitatibus, logarithmicè proportionales, componendo, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Rationes A ad B, & C ad D, sunt logarithmicè proportionales.

Dico componendo, rationes $A+B$ ad B, & $C+D$ ad D, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Assumatur E ratio, ad quàm $C+D$ sit logarithmicè, sicut $A+B$ ad B.

Demonstr.

constr. Quoniam $A+B$ ad B, & $C+D$ ad E, sunt lo-
21. h. garithmicè proportionales: ergo diuidendo A
ad B, & $C+D-E$ ad E, sunt logarithmicè
hypoth. proportionales. Sed A ad B, & C ad D sunt
15. h. logarithmicè proportionales. Ergo C ad D, &
$C+D-E$ ad E, sunt logarithmicè proportionales. Ergo D, æquealta est, ideoque eadem, atque E.

18. h. Nam si D, esset altior, quàm E: esset C altior,
4. 3. quàm $C+D-E$. Sed contra, esset $C+D$ altior,
4. 3. quàm $C+E$: & $C+D-E$, altior, quàm C: quod est contradictio. Rursum si D, esset depressior,
18. h. quàm E: esset C, depressior, quàm $C+D-E$.
4. 3. Sed contra, esset $C+D$, depressior; quàm $C+E$:

&

4. 3. & $C+D-E$, depressior, quàm C: quod est contradictio.

Ergo D eadem est, atque E. Ergo $C+D$ ad
18. h. D, & $C+D$ ad E, sunt proportionales logarithmi-
constr. cè. Sed $A+B$ ad B est vt $C+D$ ad E: ergo A
15. h. $+B$ ad B, est vt $C+D$ ad D logarithmicè. Quod &c.

Hypoth. 2.

Rationes A ad B, & quantitates a ad b, sunt logarithmicè proportionales.

Dico componendo, rationes $A+B$ ad B, & quantitates $a+b$ ad b, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Assumatur e quantitas, ad quàm, $a+b$ est logarithmicè, sicut ratio $A+B$, ad rationem B.

Demonstr.

constr. Quoniam $A+B$ ad B, & $a+b$ ad c, sunt logarithmicè proportionales: ergo diuidendo A ad B, & $a+b-c$ ad c, sunt logarithmicè, propor-
hypoth. tionales. Sed A ad B, & a ad b, sunt logari-
15. h. thmicè proportionales. Ergo a ad b, & $a+b$ $-c$ ad c, sunt proportionales. Ergo b, c, sunt quantitates æquales.

14. 5. Nam si b, maior esset, quàm c: esset a, maior, quàm $a+b-c$. Sed contra, esset $a+b$, maior, quàm $a+c$: & $a+b-c$, maior, quàm a: quod
14. 5. est contradictio. Rursum si b, minor esset, quàm

c: esset

c: esset a, minor, quàm $a+b-c$. sed contra, esset $a+b$, minor, quàm $a+c$: & $a+b-c$, minor quàm a: quod est contradictio.

7. 5. Ergo b, c, sunt æquales. Ergo $a+b$, ad b,
constr. est vt $a+b$ ad c: Sed ratio $A+B$ ad rationem
15. *h.* B, est logarithmicè, vt quantitas $a+b$ ad quantitatem c: Ergo etiam est logarithmicè, vt $a+b$ ad b. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 23. Prop. 23.

SI quemadmodum tota ratio, ad totam, ita logarithmicè fuerit abscissa ratio, ad abscissam: erit & residua, ad residuam, sicut logarithmicè tota ad totam.

Hypoth.

Rationes $A+B$ ad $C+D$, & A ad C, sunt proportionales logarithmicè.

Dico etiam $A+B$ ad $C+D$, & B ad D, esse proportionales logarithmicè.

Demonstr.

hypoth. Rationes $A+B$ ad $C+D$, & A ad C, sunt
20. *h.* proportionales logarithmicè: ergo permutando,
21. *h.* sunt proportionales logarithmicè $A+B$ ad A, & $C+D$ ad C: ergo diuidendo, B ad A, &
20. *h.* D ad C, sunt proportionales: ergo permutando B ad D, & A ad C, sunt proportionales: Sed A ad C, & $A+B$ ad $C+D$ sunt proportio-

 nales.

15. *h.* nales. Ergo $A+B$ ad $C+D$, & B ad D, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 24. Prop. 24.

SI sint tres rationes, atque tres quantitates, quæ binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur: ex æquo autem prima ratio, quàm tertia, altior fuerit; erit & prima quantitas, quàm tertia, maior: quod si prima ratio, fuerit æquealta tertiæ; erit & prima quantitas, æqualis tertiæ: sin illa depressior; hęc quoque minor erit. Et è conuerso.

Hypoth. commun.

Tres rationes A, B, C, & tres quantitas a, b, c, binæ, & binæ, sunt logarithmicè proportionales: A ad B, vt a ad b; B ad C, vt b ad c.

Hypoth. 1.

Altior est ratio A, quàm C.

Dico, maiorem esse quantitatem a, quàm c.

Demonstr.

12. *h.* Ratio B ad C, maior est logarithmicè, quàm
hypoth. *def. 8. h.* B ad A: sed b ad c est logarithmicè vt B ad
17. *h.* C: & B ad A, est logarithmicè, vt b ad a: er-
10. 5. go b ad c, maior est, quàm b ad a. Ergo maior est a, quàm c. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ sunt rationes A, C.

Dico, æquales esse quantitates a, c.

De-

Demonstr.

11. h. sup. 9. 5. | Ratio *B* ad *C*, est logarithmicè, vt *B* ad *A*. Ergo *b* ad *c*, est vt *b* ad *a*. Ergo æquales sunt *a*, *c*. Quod &c.

Hypoth. 3.

Depressior est ratio *A*, quàm *C*.

Dico, minorem esse quantitatem *a*, quàm *c*.

Demonstr.

def. p. h. sup. | Altior est, *C*, quàm *A*: ergo maior est *c*, quàm *a*: Ergo minor est *a*, quàm *c*. Quod &c.

Eodem modo demonstrabitur è conuerso: quòd si *a* quantitas, maior est quantitate *c*: etiam ratio *A*, ratione *C* est altior: si æqualis; æquealta: si minor; depressior. Quod. &c.

Quare &c.

Theor. 25. *Prop.* 25.

SI sint tres rationes, aliæque ipsis æquales numero, quę binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur: ex æquo autem, prima quàm tertia altior fuerit; erit & quarta, quàm sexta altior. Quod si prima tertiæ fuerit æquealta; erit & quarta æquealta sextæ: sin illa depressior; hæc quoque depressior erit.

Hypoth. commun.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ, & binæ sunt logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *D* ad *E*; *B* ad *C*, vt *E* ad *F*.

Hypoth. 1.

Altior est ratio *A*, quàm *C*.

Dico altiorem esse *D*, quàm *F*.

Demonst.

12. *h.* Maior est *B*, ad *C*, logarithmicè, quàm *B* ad
hypoth. *A*. Sed *B* ad *C* est logarithmicè, vt *E* ad *F*: &
def.12.h *B* ad *A*, logarithmicè, vt *E* ad *D*. Ergo maior
17. *h.* est *E* ad *F*, logarithmicè, quàm *E* ad *D*. Ergo
14. *h.* altior est *D*, quàm *F*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ sunt rationes *A*, *C*.

Dico, æquealtas esse rationes *D*, *F*.

Demonstr.

11. *h.* Eadem est *B* ad *C*, logarithmicè, quæ *B*
sup. ad *A*. Ergo eadem est *E* ad *F* logarithmicè quæ
13. *h.* *E* ad *D*. Ergo æquealtæ sunt rationes *D*, *F*.
Quod &c.

Hypoth. 3.

Depressior est *A*, quàm *C*.

Dico, depressiorem esse *D*, quàm *F*.

Demonstr.

def p.h. Altior est enim *C*, quàm *A*: ergo altior est *F*,
l sup. quàm *D*: ergo depressior est *D*, quàm *F*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. *Prop.* 26.

SI sint tres quantitates, atque tres rationes, quę binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur; fueritque per-

perturbata earum proportio: ex æquo autem prima quantitas, quàm tertia, maior fuerit; erit & prima ratio, quàm tertia, altior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis quantitas; erit & prima tertiæ, æquealta ratio: sin illa minor, hęc quoque depressior erit. Et è conuerso.

Hyppth. commun.

Tres quantitates *a*, *b*, *c*, atque tres rationes *A*, *B*, *C*, binę, & binæ, sunt logarithmicè, proportionales; & earum perturbata est proportio: quantitates enim *a* ad *b*, & rationes *B* ad *C*, sunt logarithmicè proportionales: necnon quantitates *b* ad *c*, & rationes *A* ad *B*, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Maior est *a*, quàm *c*.

Dico altiorem esse *A*, quàm *C*.

Demonstr.

8. 5. Maior est *b* ad *c* ratio, quàm *b* ad *a*; Sed
hypoth. *def.* 8. *h.* *b* ad *c*, est logarithmicè, vt *A* ad *B*: & *b* ad
17. *h.* *a*, logarithmicè, vt *C* ad *B*. Ergo *A* ad *B*,
14. *h.* maior est logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Ergo altior est *A*, quàm *C*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquales sunt *a*, *c*.

Dico æquealtas esse *A*, *C*.

Demonstr.

7. 5. *sup.* Eadem est *b* ad *c*, quæ *b* ad *a*. Ergo eadem
13. *h.* est logarithmicè *A* ad *B*, quæ *C* ad *B*. Ergo *A*, *C* sunt æquealtæ. Quod &c.

Hy-

Hypoth. 3.

Minor est *a*, quàm *c*.

Dico depressiorem esse *A*, quàm *C*.

Demonstr.

sup. | Maior est *c*, quàm *a*: Ergo altior est *C*, quàm
def.2.h. | *A*: ergo depressior est *A*, quàm *C*. Quod &c.

Eodem modo demonstrabitur è conuerso: quòd si ratio *A*, ratione *C*, est altior; etiam quantitas *a*, quantitate *c*, est maior: si æquealta; æqualis: si depressior; minor. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. *Prop.* 27.

SI sint tres rationes, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur; fueritque perturbata earum proportio logarithmica: ex æquo autem prima, quàm tertia altior fuerit; erit & quarta, quàm sexta, altior. Quòd si prima tertiæ fuerit æquealta; erit & quarta æquealta sextæ: sin illa depressior; hæc quoque depressior erit.

Hypoth. commun.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ, & binæ, sunt logarithmicè proportionales; & earum perturbata est proportio: sunt enim *A* ad *B*, & *E* ad *F*, logarithmicè proportionales: necnon *B* ad *C*, & *D* ad *E*, sunt proportionales logarithmicè.

Hy-

Hypoth. 1.

Altior est *A*, quàm *C*.

Dico altiorem esse *D*, quàm *F*.

Demonstr.

12. *h.* Maior est logarithmicè, *B* ad *C*, quàm *B* ad
hypoth. *A*: sed *B* ad *C*, est vt *D* ad *E*: & *B* ad *A* est,
def. 12. *h* vt *F* ad *E*, logarithmicè: ergo *D* ad *E* maior
17. *h.* est logarithmicè, quàm vt *F* ad *E*: Ergo *D* al-
14. *h.* tior est, quàm *F*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ sunt *A*, *C*.

Dico æquealtas esse *D*, *F*.

Demonstr.

11. *h.* Eadem est *B* ad *C* logarithmicè, quæ *B* ad
sup. *A*. Ergo eadem est *D* ad *E* logarithmicè, quæ
13. *h.* *F* ad *E*. Ergo *D*, *F* sunt æquealtæ. Quod &c.

Hypoth. 3.

Depressior est *A*, quàm *C*.

Dico depressiorem esse *D*, quàm *F*.

Demonstr.

def. p. h. Altior est *C*, quàm *A*: ergo altior est *F*, quàm
sup. *D*: ergo depressior est *D*, quàm *F*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 28. *Prop.* 28.

SI sint quotcunque rationes totidemque quantitates, quæ binæ, in eadem ratione logarithmica sumantur:

&

& ex æqualitate in eadem erunt ratione logarithmica.

Hypoth.

Sint quotcunque rationes *A*, *B*, *C*, *D*, totidemque quantitates *a*, *b*, *c*, *d*: binæ, & binæ logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *a* ad *b*; *B* ad *C*, vt *b* ad *c*; *C* ad *D*, vt *c* ad *d*.

Dico ex æqualitate, *A* ad *C*, & *a* ad *c*, esse logarithmicè proportionales.

Item *A* ad *D*, & *a* ad *d* esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur ęquemultiplicata, & multiplex, 3*A*, 3*a*: item rationis, & quantitatis, *B*, *b*, sumantur, 4*B*, 4*b*: & rationis, & quantitatis, *C*, *c*, sumantur, 2*C*, 2*c*.

Demonstr.

hypoth. Quoniam *A* ad *B*, & *a* ad *b*, sunt logarithmicè proportionales: ergo 3*A* ad 4*B*, & 3*a* ad 4*b*, sunt logarithmicè proportionales.
6. b. Item quoniam *B* ad *C*, & *b* ad *c*, sunt loga-
hypoth. rithmicè proportionales: ergo 4*B* ad 2*C*, &
6. b. 4*b* ad 2*c*, sunt logarithmicè proportionales. Er-
24. b. go ex æquali, si 3*A* est altior, quàm 2*C*; etiam 3*a* est maior, quàm 2*c*: si æquealta; æqualis: si
def. 8. b. depressior; minor. Ergo *A* ad *C*, & *a* ad *c* sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.
hypoth. Sunt autem *C* ad *D*, & *c* ad *d*, logarithmicè pro-

sup. | cè proportionales. Ergo *A* ad *D*, & *a* ad *d*, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. *Propos.* 29.

SI sint quotcunque rationes, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem logarithmica ratione sumantur: & ex æqualitate, in eadem erunt logarithmica ratione.

Hypoth.

Sint quotcunque rationes, & aliæ totidem, *A*, *B*, *C*, *D*, & *E*, *F*, *G*, *H*: quæ binæ, & in eadem ratione sumantur: videlicet, *A* ad *B*, & *E* ad *F*: item *B* ad *C*, & *F* ad *G*: necnon *C* ad *D*, & *G* ad *H*.

Dico ex æqualitate *A* ad *C*, & *E* ad *G*, esse logarithmicè, proportionales.

Item *A* ad *D*, & *E* ad *H*, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum *A*, *E*, sumantur æquemultiplicatæ, 3*A*, 3*E*: item rationum *B*, *F*, æquemultiplicatæ 4*B*, 4*F*: & rationunm *C*, *G*, æquemultiplicatæ 2*C*, 2*G*.

Demonstr.

hypoth. | Quoniam *A* ad *B*, & *E* ad *F*, sunt loga-
7. h. | rithmicè proportionales, etiam 3*A* ad 4*B*, & 3*E* ad 4*F*, sunt logarithmicè proportionales.
hypoth. | item quoniam *B* ad *C*, & *F* ad *G*, sunt lo-

Bb gari-

7. h. garithmicè proportionales; etiam $4B$ ad $2C$, & $4F$ ad $2G$, sunt logarithmicè, proportio-
25. h. nales. Ergo si $3A$ altior est quàm $2C$; etiam $3E$ altior est, quàm $2G$: si æquealta; æquealta: si
def. 12. h deprессior; depressior. Ergo A ad C, & E ad G, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 30. Prop. 30.

SI sint tres quantitates, totidemque rationes, quæ binæ in eadem ratione logarithmica sumantur; fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æqualitate, in eadem erit ratione logarithmica.

Hypoth.

Sint tres quantitates a, b, c, totidemque rationes A, B, C, binæ, & binæ logarithmicè proportionales, & earum sit perturbata proportio: nempe sint a ad b, & B ad C, logarithmicè proportionales: & b ad c, & A ad B, logarithmicè proportionales.

Dico, a ad c, & A ad C, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Sumantur ipsarum a, b, quantitatum æquemultiplices $3a$, $3b$, & rationis A, æquemultiplicata $3A$. ipsarum quoque rationum B, C, & quantitatis c, sumantur æquemultiplicatæ rationes $4B$, $4C$, & æquemultiplex quantitas $4c$.

De-

Demonstr.

hypoth. Quoniam *b* ad *c*, & *A* ad *B*, sunt logarithmicè proportionales: etiam 3*b* ad 4*c*, & 3*A* ad
6. b.
15. 5. 4*B*, sunt logarithmicè proportionales: sunt au-
hypoth. tem 3*a* ad 3*b*, sicut *a* ad *b*: & *a* ad *b*, sicut lo-
19. b. garithmicè *B* ad *C*: & *B* ad *C* logarithmicè, si-
17. b. cut 4*B* ad 4*C*. Ergo 3*a* ad 3*b*, est vt 4*B* ad 4*C*. Sed ostensum est, 3*b* ad 4*c*, esse logarithmicè, vt
26. b. 3*A* ad 4*B*. ergo ex æquali, si 3*a* est maior, quàm 4*c*; etiam 3*A* est altior, quàm 4*C*: si æqualis;
def. 8. b. æquealta: si minor; depressior. Ergo *a* ad *c*, est logarithmicè, sicut *A* ad *C*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 31. Prop. 31.

SI sint tres rationes, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione logarithmica sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio logarithmica: etiam ex æqualitate, in eadem erunt logarithmica ratione.

Hypoth.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ sunt in eadem ratione logarithmica, & earum est perturbata proportio logarithmica; sunt enim *A* ad *B*, & *E* ad *F* logarithmicè proportionales: necnon *B* ad *C*, & *D* ad *E* sunt logarithmicè proportionales.

Dico, ex æquali, *A* ad *C*, & *D* ad *F*, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum *A*, *B*, *D*, ſumantur æquemultiplicatæ $3A$, $3B$, $3D$: & rationum C, E, F, aliæ ſumantur ęquemultiplicatæ $4C$, $4E$, $4F$.

Demonſtr.

19. *h.* Rationes $3A$ ad $3B$, & A ad B, ſunt logari-
hypoth. thmicè proportionales: rationes A ad B, & E
19. *h.* ad F, ſunt logarithmicè proportionales: ratio-
nes E ad F, & $4E$ ad $4F$, ſunt logarithmicè
17. *h.* proportionales: ergo rationes $3A$ ad $3B$, & $4E$
hypoth. ad $4F$, ſunt logarithmicè proportionales. Et
quoniã B ad C, & D ad E rationes, logarithmicè
7. *h.* ſunt proportionales: etiam $3B$ ad $4C$, & $3D$
ad $4E$ rationes, logaritmicè ſunt proportiona-
27. *h.* les. Ergo ex æquali, ſi $3A$ eſt altior, quàm $4C$;
etiam $3D$ eſt altior, quàm $4F$: ſi ęquealta; ęque-
def. 12. *h* alta: ſi depreſſior; depreſſior. Ergo A ad C, &
D ad F rationes, ſunt logarithmicè proportio-
nales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 32. *Prop.* 32.

SI prima ratio ad ſecundam, logarithmicè fuerit, ſicut prima quantitas ad ſecundam; tertia quoque ratio ad ſecundam, logarithmicè fuerit, ſicut tertia quantitas ad ſecundam: etiam compoſita ex prima, & tertia ratione, ad ſecundam, erit logarithmicè, ſicut aggregata quantitas

ex

ex prima, & tertia, ad secundam.

Hypoth.

Sint A, B, C rationes, & a, b, c, quantitates: & sit A ad B logarithmicè, sicut a ad b: item C ad B logarithmicè, sicut c ad b.

Dico $A+C$ ad B, esse logarithmicè, sicut $a+c$ ad b.

Demonstr.

hypoth. Quoniam C ad B, est logarithmicè, sicut c ad
def.8.h. b: conuertẽdo, B ad C, est logarithmicè, sicut b
hypoth. ad c: Sed A ad B, est logarithmicè, sicut a ad b:
28. h. ergo ex ęquali A ad C, est logarithmicè, sicut a ad
22. h. c: ergo componendo $A+C$ ad C, est logarithmi-
hypoth. cè, sicut $a+c$ ad c. Sed C ad B est logarithmicè,
28. h. sicut c ad b: ergo ex æquali $A+C$ ad B est logarithmicè sicut $a+c$ ad b. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. Prop. 33.

SI prima ratio ad secundam, eadem logarithmicè fuerit, quæ tertia ad quartam; fuerit autem, & quinta ad secundam, eadem logarithmicè, quæ sexta ad quartam: erit & composita prima cum quinta ad secundam, eadem quæ composita tertia cum sexta ad quartam.

Hypoth.

Rationes A ad B, & C ad D, sunt proportionales: item E ad B, & F ad D, sunt proportionales.

Dico $A+E$ ad B, & $C+F$ ad D, esse proportionales.

De-

Demonstr.

hypoth. Quoniam E ad B, & F ad D, sunt logari-
def.12.h thmicè proportionales: conuertendo B ad E,
& D ad F, sunt logarithmicè proportionales:
hypoth. sed A ad B, & C ad D, sunt logarithmicè
29. h. proportionales: Ergo ex æquali A ad E, & C
22. h. ad F; sunt logarithmicè proportionales: ergo
componendo $A+E$ ad E, & $C+F$ ad F, sunt
hypoth. logarithmicè proportionales. Sed E ad B, &
29. h. F ad D, sunt logarithmicè proportionales. Ergo $A+E$ ad B, & $C+F$ ad D, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. Prop. 34.

SI rationes quatuor fuerint logarithmicè proportionales: composita ex duabus, altiore omnium, & depressiore omnium, altior est, quàm composita ex reliquis duabus.

Hypoth.

Sint rationes A ad B, & C ad D logarithmicè proportionales: Et esto A altior, quàm B, necnon altior quàm C. Et quoniam A altior est, quàm C: ergo B altior est, quàm D. Ergo A altior est omnium; & D depressior omnium.

Dico rationem $A+D$, altiorem esse ratione $B+C$.

Præ-

Præpar.

Quoniam A altior eſt, quàm B: ſumatur E ratio quacum compoſita B, facit rationem A: vt ita ratio A ſit eadem, quę $B+E$. Item quoniam C altior eſt, quàm D: ſumatur F ratio, quacum compoſita D, facit rationem C: vt ita ratio C, ſit eadem, quæ $D+F$.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam A ad B, & C ad D, ſunt loga-
conſtr. rithmicè proportionales: & eſt A, eadem, quæ
11. *h.* $B+E$: & C, eadẽ, quæ $D+F$. ergo $B+E$ ad B,
& $D+F$ ad D, ſunt logarithmicè proportiona-
21. *h.* les: ergo diuidendo, E ad B, & F ad D, ſunt
hypoth. logarithmicè proportionales. Sed B altior eſt,
18. *h.* quàm D: ergo E altior eſt, quàm F: compo-
4. 3. ſitiſque communiter B, & D rationibus; ergo
conſtr. $B+E+D$ ratio, altior eſt, quàm $B+D+F$. Sed
$B+E$, ratio eadem eſt, quæ A: & $D+F$, ea-
dem quæ C: ergo $A+D$ altior eſt, quàm
$B+C$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 35. Prop. 35.

RAtiones proportionales, per conuerſionem rationis, ſunt proportionales.

Hypoth.

Rationes A ad B, & C ad D ſunt logarithmicè proportionales: & eſt A altior, quàm B: ideoque etiam C,

altior

altior est, quàm *D*.

Dico *A* ad *A—B*, esse logarithmicè, sicut *C* ad *C—D*.

Demonstr.

hypoth.	*A*; *B*: *C*; *D*.
21. *h.*	*A—B*; *B*: *C—D*; *D*.
def.12.h	*B*; *A*; *D*; *C*.
29. *h.*	*A—B*; *A*: *C—D*; *C*.
def.12.h	*A*; *A—B*: *C*; *C—D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 36. Prop. 36.

RAtiones logarithmicè proportionales, per homologiam sunt logarithmicè proportionales.

Demonstr.

def.12.h 23. *h.* 22. *h.* 35. *h.* 21. *h.* 19. *h.* 20. *h.* 16. *h.* 28. *h.*

Nam conuertendo, rationes fiunt proportionales: item homologas depressiores ab homologis altioribus decomponendo: & adcomponendo; & per conuersionem rationis: & diuidendo: & æquemultiplicando, & æquesubmultiplicando: & permutando: & colligendo: & ex æquali in proportione logarithmica ordinata: coniunctisque omnifariam argumentis huiusmodi, quocunque ordine, per homologiam, logarithmicè proportionales fiunt. Quod &c.

Quare &c.

Petrus

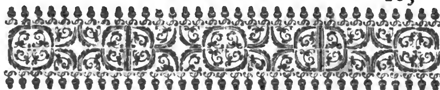
Petrus Mengolus, Io. Galeatio Manzio, iuueni studiosissimo. S. D.



Vintum hoc elementum, de nouis, & naturalibus logarithmis; cuiusque rationis inseparabiliter proprijs, quocum communicarem, neminem in mea, aut cuiusquam alterius Mathematici schola, satis noui dispositum, præter te, omnium bonarum artium, & in primis Mathematicarum studiosissimum. Et hæc profectò insignis fælicitas, incomparabili virtuti accessit, & meritis Excellentissimi præceptoris tui Cassini: quòd te, tùm frequentem in Musæo auditorem, tùm in suis Astronomicis, & Aquaticis laboribus, comitem indiuiduum, & solertem nactus fuerit adiutorem. Itaque cum tuam mihi consuetudinem, rariùs hoc anno, quàm ante consueueras, offerres; mandaui, meum tui desiderium, tibi significari: vt meorum etiam studiorum particeps fieres, & consultor. Gratiàm liberaliter fecisti, quàm volebam: meque domi aliquoties conuenisti, huiu-

sce opusculi partem hanc scriptitantem. Et ex me, tùm definitiones praecedentium elementorum, & rationes nominum, & propriam cuiusque vtilitatem elementi, necnon quasdam nobiliores demonstrationes audisti sparsim; tùm vel maximè numerosam methodum: qua hyperlogarithmorum, & hypologarithmorum, & logarithmorum rationes mihi contigit inuenire. tuque inuenti subtilitatem laudasti, quòd mihi Deus liberaliter tribuit: atque vtilitatem trigonometricam, ad faciliorem logarithmici canonis constructionem, optimè praeuidisti. Ex laude tua, plurimum profecisse me fateor: nam alacrior factus, & ex tecum communicatione vegetior, multarum conclusionum, quas praenoui euidentissimis arithmeticis artificijs, quae mihi supererant demonstranda, media lemmata reperire caepi, longè faelicius. Libellum igitur hucusque non sine tuo adminiculo perfectum, offero: vt sermones indemonstratos, quos inuicem habebamus, per te ipsum legendo possis complere. Vale. meque, & labores meos, inprimis Excellentissimo Cassino, deinde alijs tuis conscholaribus, & amicis, vt commendes, rogo.

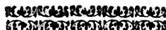
GEO-



GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.



1 Differentia duarum quantitatum, quando prima superat secundam, dicetur, Excessus primæ & secundæ.

2 Quando verò prima superatur à secunda, dicetur, Defectus primæ, & secundæ.

3. Similes differentiæ dicentur, excessus excessibus, & defectus defectibus.

4. Dissimiles verò, excessus defectibus.

5. Quatuor quantitates, dicentur, Arithmeticè dispositæ; cum primæ & secundæ, tertiæ & quartæ, fuerint similes, & æquales differentiæ.

6. Inuersio Arithmetica, dicetur; cum quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur arithmeticè, secunda & prima, quarta & tertia.

7. Permutatio Arithmetica, dicetur: cum quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponenter arithmeticè, prima & tertia, secunda & quarta.

8. Si fuerint aliquot quantitates, atque aliæ totidem, & fuerint prima & secunda primarum, item prima & secunda secundarum, dispositæ arithmeticè; fuerint quoque secunda & tertia primarum, item secunda & tertia secundarum, arithmeticè dispositæ; & sic deinceps vsque ad vltimas: dicentur primæ similiter esse dispositæ arithmeticè, atque secundę.

9. Quòd si prima & vltima primarum, item prima & vltima secundarum, fuerint arithmeticè dispositæ; dicentur, ita dispositæ, ex æqualitate arithmetica.

10. Tres quantitates, dicentur, arithmeticè ordinatę; cum primæ & secundæ, secundæ & tertiæ, similes, & ęquales fuerint differentiæ.

11. Plures quantitates, dicentur, arithmeticè ordinatæ; cum ternæ deinceps fuerint arithmeticè ordinatę: idest, cum primæ & secundæ, secundæ & tertiæ, tertiæ & quartæ, & deinceps vsque ad vltimam, similes, & æquales fuerint differentiæ.

12. Series naturalis arithmetica, dicetur; cuius ordinatarum arithmeticè quantitatum prima, dimidia est secundæ.

13. Quatuor quantitates, dicentur, Harmonicè dispositæ, cum differentia primæ & secundæ, ad similem differen-

rentiam tertiæ & quartæ, rationem compositam habuerit ex rationibus, primæ ad tertiam, & secundæ ad quartam.

14. Inuersio Harmonica, dicetur; cùm quatuor quantitates harmonicè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur harmonicè, secunda & prima, quarta & tertia.

15. Permutatio Harmonica, dicetur, cùm quatuor quantitates harmonicè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur harmonicè, prima & tertia, secunda & quarta.

16. Si fuerint aliquot quantitates, atque aliæ totidem; & fuerint prima & secunda primarum, item prima & secunda secundarum, dispositæ harmonicè; fuerint quoque secunda & tertia primarum, item secunda & tertia secundarum, dispositę harmonicè; & sic deinceps vsque ad vltimas: dicentur primæ similiter esse dispositæ harmonicè, atque secundæ.

17. Quòd si prima & vltima primarum, item prima & vltima secundarum, fuerint harmonicè dispositę; dicentur, ita dispositæ, ex æqualitate harmonica.

18. Tres quantitates, dicentur, harmonicè ordinatę; cum primæ & secundæ differentia, ad similem differentiam secundæ & tertiæ, fuerit sicut prima, quantitas ad tertiam.

19. Plures quantitates dicentur harmonicè ordinatæ, cum ternæ deinceps fuerint harmonicè ordinatæ: idest cum primæ & secundæ differentia, ad similem differentiam secundæ & tertiæ, fuerit vt prima ad tertiam; differentia quo-

quoque ſecundæ & tertiæ, ad ſimilem differentiam tertiæ & quartæ, fuerit ſicut ſecunda ad quartam; & ſic deinceps vſque ad vltimam.

20. Series naturalis harmonica, dicetur, cuius ordinatarum harmonicè quantitatum prima, dupla eſt ſecundę.

21. Si à rationali, ſeries harmonica naturalis fuerit ordinata; & à quotoquouis ordinatorum terminorum quotcunque fuerint deinceps aſſumpti, & aggregati: ſumma, dicetur, Prologarithmus.

22. Porrò prologarithmus, dicetur Hyperlogarithmus earum rationum, quas habent inuicem, primus aſſumptus terminus, & proximus vlterior vltimo, non aſſumptus.

23. Et earum rationum Hypologarithmus, dicetur, quas habent inuicem, vltimus aſſumptus terminus, & proximus prior primo, non aſſumptus.

24. Quantitas omni minor hyperlogarithmo earumdem rationum, & omni maior hypologarithmo, earumdem Logarithmus, dicetur.

25. Ex totenis deinceps Prologarithmorum ſeries, dicetur: in qua, ex prioribus, dicetur, Primus; ex totidem immediatè ſequentibus, Secundus; ex alijs deinceps totidem, Tertius Prologarithmus; & ſic deinceps reliqui. Vt prologarithmorum, ex ternis à ſecundo, dicetur, Primus, qui ex ſecundo, tertio, & quarto fit collectis; Secundus, qui ex quinto, ſexto, & ſeptimo; Tertius, qui ex octauo, nono, & decimo; & ita deinceps.

26. Si

26. Si duo prologarithmi, ex inæqualibus multitudine terminis collecti fuerint; & cuius maior est multitudo terminorum, eius termini singuli, per alteram multitudinem fuerint æqualiter diuisi: siquidem factæ partes ordinatim sumptæ maiorum primùm terminorum, deinde minorum, & collectæ totenæ, quota est sua maior multitudo terminorum, maiores fuerint singulis terminis alterius prologarithmi: maior profectò prologarithmus erit, ex maioribus partibus; & dicetur, Perspectè maior.

27. Si verò factæ partes totenæ, minores fuerint singulis: erit profectò minor prologarithmus, ex minoribus partibus; & dicetur Perspectè minor.

28. Si quatuor proportionalium, rationalis fuerit prima: quarta, dicetur, Productus secundæ & tertiæ. Et significabitur charactere, ex vtrisque secundæ, ac tertiæ characteribus deinceps conscriptis composito. vtpote ad quam, rationalis habet rationem compositam ex rationibus ad tertiam, & ad secundam. Exempli gratiam. *u* ad *a*, est vt *b* ad *ab*. Item. *u* ad *ab*, est vt *c* ad *abc*.

29. Si verò quatuor proportionalium, rationalis fuerit secunda: quarta, dicetur, Fractio. & significabitur charactere tertiæ, ante characterem primæ scripto, & patrenthefes clauso. Exempli gratia *a* ad *u* est vt *b* ad *b* (*a*). Item. *ab* ad *u* est vt *c* ad *c* (*ab*). Et *c* ad *u*, est vt *ab* ad *ab* (*c*).

30. Tertia autem, dicetur; Numerator fractionis: cuius character, scribetur supra lineolam. vt in charactere

fra-

fractionis, *b* (*a*), numerator est *b*.

31. Et prima, dicetur, Denominator fractionis: cuius character, scribetur infra lineolam. vt in charactere fractionis *b* (*a*), denominator est *a*.

32. Numerosa ratio dicetur, cui eandem habet numerus ad numerum.

33. Non numerosa ratio dicetur, cui nulla numerosa est eadem.

34. Non numerosæ rationis logarithmus, dicetur, quantitas, minor omni logarithmo altioris numerosæ rationis, & maior omni logarithmo depressioris.



Theor-

Theorema prima Propositio prima.

SI trium inæqualium quantitatum, minima, non eſt minor, quàm ſecunda poteſtas differentię extremarum: ipſa differentia extremarum, minor eſt, ad rationalem, quàm vt minima, ad defectum minimæ, & mediæ.

Hypoth.

Sunto tres inæquales quantitates *a*, *a+b*, *a+b+c*: & eſto *a*, non minor, quàm *b2+2bc+c2*.

Dico *b+c*; *u*: minorem eſſe, quàm *a*; *b*.

Demonſt.

hypoth.	*b2+2bc+c2*: non maior, quàm *a*.
8. 5.	*b2+2bc+c2*; *b+c*: non maior, quàm *a*; *b+c*.
8. *p*.	*b2+2bc+c2*; *b+c*: *b+c*; *u*.
13. 5.	*b+c*; *u*: non maior, quàm *a*; *b+c*.
8. 5.	*a*; *b+c*: minor, quàm *a*; *b*.
13. 5.	*b+c*; *u*: minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 2. Prop. 2.

CVm trium inæqualium numerorum, minimus, non eſt minor, quàm ſecunda poteſtas differentię extremorum; ſi defectus medij & maximi denominetur à minimo; defectus verò minimi & medij auctus vnitate denominetur à maximo: fiunt duæ Fractiones; quarum ſumma, minor eſt, quàm differentia extremorum, vnitate aucta, denominata à medio.

Hypoth.

Sunto tres inæquales numeri a, $a+b$, $a+b+c$: & esto a, non minor, quàm $b2+2bc+c2$.

Dico c (a),$+b+u$ $(a+b+c)$: minorem esse, quàm $b+c+u$ $(a+b)$.

Demonstr.

p. b. | $b+c$; u: minor est, quàm a; b.
p. 3. | $b+c+u$; u: minor, quàm $a+b$; b.
3. 3. | $b+c+u$; $b+c$: maior, quàm $a+b$; a.

Itaque *per* 19. 7. productus $b+c$, per $a+b$: minor est quàm productus $b+c+u$, per a.

Additoque communi producto a, per $a+b$. productus $b+c+a$, per $a+b$: minor, quàm summa productorum $b+c+u$, per a; & $a+b$, per a.

Et communiter multiplicando per c. productus $b+c+a$, per $a+b$, per c: minor, quàm summa productorum $b+c+u$, per a, per c; & $a+b$, per a, per c.

Additoque communi producto a, per $b+u$, per $a+b$. summa productorum $b+c+a$, per $a+b$, per c; & a, per $b+u$, per $a+b$: minor, quàm productus a, per $a+b+c$, per $b+c+u$.

Et communiter diuidendo, per a, per $a+b+c$, per $a+b$. c (a),$+b+u$ $(a+b+c)$: minor, quàm $b+c+u$ $(a+b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 3. Prop. 3.

SI trium inæqualium numerorum, defectus medij & maximi, auctus vnitate, denominetur à minimo; defectus verò minimi & medij denominetur à maximo: fiunt duæ fractiones; quarum summa est maior, quàm differentia extremorum, vnitate aucta, denominata à medio.

Hypoth.

Sunto tres inæquales numeri, a, $a+b$, $a+b+c$.

Dico $c+u$ $(a)+b$ $(a+b+c)$: maiorem esse, quàm $b+c+u$ $(a+b)$.

Demonstr.

Productus $c+u$, per $a+b+c$, per b: maior est producto a, per c, per b.

Additoque communi producto a, per b, per $a+b$. summa productorum $c+u$, per $a+b+c$, per b; & a, per b, per $a+b$: maior est, quàm productus a, per b, per $a+b+c$.

Additoque communi producto $c+u$, per $a+b+c$, per a. summa productorum $c+u$, per $a+b+c$, per $a+b$; & a, per b, per $a+b$: maior est quàm productus a, per $b+c+u$, per $a+b+c$.

Et communiter diuidendo, per a, per $a+b+c$, per $a+b$. $c+u$ $(a)+b$ $(a+b+c)$: maior est, quàm $b+c+u$ $(a+b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop. 4.

QVatuor termini arithmeticè diſpoſiti, permutando, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

Hypoth.

Quatuor termini *a*, *a+b*, *c*, *c+b*, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

Dico permutando *a*, *c*, *a+b*, *c+b* eſſe arithmeticè diſpoſitos.

Demonſtr.

Siquidem *a*, maior eſt, quàm *c*; tantumdem *a+b*, maior eſt, quàm *c+b*: ſi minor, minor. Ergo *a*, *c*, *a+b*, *c+b*, ſunt arithmeticè diſpoſiti. Quod &c. Quare &c. *def. 5. h.*

Theor. 5. Prop. 5.

SI fuerint aliquot quantitates, in vna ſerie, ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque totidem, in altera: erunt ex æqualitate arithmetica, prima & vltima, in vna ſerie, item prima & vltima, in altera, diſpoſitæ arithmeticè.

Hypoth.

Sint *a*, *b*, *c*, ſimiliter diſpoſitæ arithmeticè, atque aliæ totidem *d*, *e*, *f*.

Dico ex ęqualitate arithmetica, eſſe diſpoſitas arithmeticè, *a*, *c*, & *d*, *f*.

Demonſtr.

def. 8. h. Sunt enim *a*, *b*, *d*, *e*, arithmeticè diſpoſitę: *4. h.* ergo permutando *a*, *d*, *b*, *e*, ſunt atithmeticè *def. 5. h.* diſpoſitę: ergo differentia *a*, *d*, differentię *b*, *e*, ſimilis

similis est, & æqualis. Similiter ostendetur differentia b, e, differentiæ c, f, similis, & æqualis: ergo differentia a, d, differentiæ, c, f, similis
def.5.h. est, & æqualis: ergo a, d, c, f, sunt arithmeticè dispositæ: ergo permutando, a, c, d, f, sunt
4. h. arithmeticè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 6. Prop. 6.

ARithmeticè dispositarum æquemultiplices, sunt arithmeticè dispositæ.

Hypoth.

Sint arithmeticè dispositæ a, $a+b$, c, $c+b$. quorum æquemultiplices $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3d$.

Dico $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3b$, esse dispositas arithmeticè.

Demonstr.

19. 5. Differentia $3a$, $3a+3b$, ad differentiam a, $a+b$, æquemultiplex est, atque $3a$ ad a: sed $3a$
19. 5. ad a, æquemultiplex est, atque $3c$ ad c: & $3c$ ad c, æquemultiplex: atque $3c+3b$ ad $c+b$: ergo differentia $3a$, $3a+3b$, ad differentiam c, $a+b$, æquemultiplex est, atque differentia $3c$, $3c$
def.5.h. $+3b$ ad differentiam c, $c+b$. Sed differentia a, $a+b$, æqualis est differentiæ c, $c+b$: ergo differentia $3a$, $3a+3b$, æqualis est differentiæ $3c$, $3c$ $+3b$.

Rur-

17.7. Rurſum differentia $3a, 3a+3b$, ſimilis eſt differentiæ $a, a+b$: & differentia $a, a+b$ ſimilis
def.5.h. differentiæ $c, c+b$: & differentia $c, c+b$ ſimilis dif-
17.7. ferentiæ $3c, 3c+3b$: Ergo differentia $3a, 3a+3b$, ſimilis eſt, & æqualis differentię $3c, 3c+3b$:
def.5.h. Ergo $3a, 3a+3b, 3c, 3c+3b$, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

IN ſerie arithmetica naturali, aliquoteni ab vno, & aliquoteni ab altero, per numeros alterutrorum multitudinis terminorum multiplicati; ſicut primi producti, ſimiliter ſecundi, ſunt arithmeticè diſpoſiti: item tertij, & quarti, & ſic deinceps.

Hypoth.

$a, a+1, a+2.$ $a+3, a+4, a+5.$
$b, b+1, b+2, b+3.$ $b+4, b+5, b+6, b+7.$
$4a, 4a+4, 4a+8.$ $4a+12, 4a+16, 4a+20.$
$3b, 3b+3, 3b+6, 3b+9.$ $3b+12, 3b+15, 3b+18, 3b+21.$

Sint in ſerie arithmetica naturali duo termini, a, b: & ſint ab a, terni; & ternorum primi $a, a+1, a+2$; ſecundi $a+3, a+4, a+5$: & à b, ſint quaterni; & quaternorum primi $b, b+1, b+2, b+3$; ſecundi, $b+4, b+5, b+6, b+7$.

Quoniam in ſerie arithmetica naturali proximorum differentiæ, ſunt vnitates: ergo alternorum, ſunt binarij; tertiorum, ternarij; quartorum, quaternarij; & ſic deinceps.

ceps. Sunt autem primus primorum ex ternis, & primus secundorum, ab inuicem tertij: & primus primorum ex quaternis, & primus secundorum, ab inuicem quarti: ergo differentia a, $a+3$, est ternarius 3; & differentia b, $b+4$, & quaternarius 4. Multiplicentur itaque terni, per 4: & quaterni, per 3: & fiant multiplices terni, & quaterni primi; item terni, & quaterni secundi.

Dico multiplices primorum $4a+8$, $4a+4$, $4a$, $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, esse similiter arithmeticè dispositos, atque secundorum, $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$.

Demonstr.

hypoth. Termini $a+2$, $a+1$, a, sunt deinceps in serie arithmetica naturali, in qua sunt etiam termini
def.6.h. $a+5$, $a+4$, $a+3$. Ergo $a+2$, $a+1$, a, sunt similiter arithmeticè ordinati, atque $a+5$,
6. h. $a+4$, $a+3$: & eorum æquemultiplices $4a+8$, $4a+4$, $4a$, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$.
sup. Defectus simplicium a, $a+3$, est ternarius:
5. 5. ergo earumdem quadruplicium defectus $4a$, $4a+12$, est productus 3, per 4. Item defectus simplicium b, $b+4$, est quaternarius: ergo earumdem triplicium defectus $3b$, $3b+12$, est
14. 7. productus 4 per 3. Sed productus 3 per 4, est æqualis producto per 3. ergo defectus $4a$,
def.5.h. $4a+12$, æqualis est defectui $3b$, $3b+12$. Ergo $4a$, $4a+12$, $3b$, $3b+12$, sunt arithmeticè

a, $a+1$, $a+2$. $a+3$, $a+4$, $a+5$.
b, $b+1$, $b+2$, $b+3$. $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.
$4a$, $4a+4$, $4a+8$. $4a+12$, $4a+16$, $4a+20$.
$3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$. $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$.

4. *b.* cè diſpoſiti. Ergo permutando $4a$, $3b$, $4a+12$,
5. *b.* $3b+12$, ſunt arithmeticè diſpoſiti. Ergo ex ęqua-
*def.*8.*b.* litate arithmetica, $4a+8$, $4a+4$, $4a$, $3b$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$.

Oſtendetur autem ſimiliter vt ſupra, quod $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$,
5. *b.* $3b+21$. Ergo ex ęqualitate arithmetica $4a+8$,
*def.*8.*b.* $4a+4$, $4a$, $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$. Quod &c.

Quare primi terni ab a, & quaterni à b, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque ſecundi. Et eadem demonſtratione oſtendemus, tum ſecundos, tum primos, eſſe ſimiliter arithmeticè diſpoſitos, atque tertios, & atque quartos, & ſic deinceps.

Theor. 8. *Prop.* 8.

PRoducti, compoſitam habent rationem producentium.

Hy-

Hypoth.

Esto quantitatum a, b, productus ab; & quantitatum c, d, productus cd.

Dico $ab;\ cd:\ a;\ c, \dashv b;\ d$.

Demonstr.

def 28b	$ab;\ u:\ a;\ u, \dashv b;\ u$.
def. 28b	$u;\ cd:\ u;\ c, \dashv u;\ d$.
p. p.	$ab;\ cd:\ a;\ c, \dashv b;\ d$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Prop. 9.

PRoducti communem habentes producentem, sunt vt producentes non communes.

Hypoth.

Esto quantitatum a, b, productus ab; & quantitatum a, c, productus ac.

Dico $ab;\ ac:\ b;\ c$.

Demonstr.

8. h.	$ab;\ ac:\ b;\ a, \dashv a;\ c$.
def. 5. 6.	$b;\ a, \dashv a;\ c:\ b;\ c$.
p. p.	$ab;\ ac:\ b;\ c$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 10. Propos. 10.

FRactiones eumdem habentes denominatorem, sunt inter se, vt numeratores.

Hypoth.

Fractionum communis denominator esto *a*: sunto numeratores *b*, *c*.

Dico *b* (*a*); *c* (*a*): *b*; *c*.

Demonstr.

def.29h	*a*; *u*: *b*; *b* (*a*).
def.29h	*a*; *u*: *c*; *c* (*a*),
11. 5.	*b*; *b* (*a*): *c*; *c* (*a*).
2. *p*.	*b* (*a*); *c* (*a*): *b*; *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 11. *Prop.* 11.

QVatuor proportionalium quarta est fractio, in qua numerator est productus secundæ & tertiæ, denominator est prima.

Hypoth.

Sunto proportionales prima *a*, secunda *b*, tertia *c*.

Dico *a*; *b*: *c*; *cb* (*a*).

Demonstr.

def.29h	*a*; *u*: *c*; *c* (*a*).
def.28h	*u*; *b*: *c*; *cb*
10. *h*.	*c*; *cb*: *c* (*a*); *cb* (*a*).
11. 5.	*u*; *b*: *c* (*a*); *cb* (*a*).
p. *p*.	*a*; *b*: *c*; *cb* (*a*). Quod &c. Quare &c.

Theor. 12. *Prop.* 12.

FRactiones, quarum numeratores æquales, reciprocè sunt, vt denominatores. *Hy-*

Hypoth.

Esto fractionum numerator communis *a*: & sunto denominatores *b*, *c*.

Dico *b*; *c*: *a* (*c*); *a* (*b*).

Demonstr.

def.29b	*b*; *u*: *a*; *a* (*b*).
def.29b	*c*; *u*: *a*; *a* (*c*).
def.6.5.	*u*; *c*: *a* (*c*); *a*.
p. p.	*b*; *c*: *a* (*c*); *a* (*b*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. Prop. 13.

DVorum productorum, quorum producentes partim communes, partim sunt non communes, primo alterum denominante, fit eadem fractio; quæ, non communium producentium, primo alterum denominante.

Hypoth.

Sunto producti *a b c*, *d b c*: quorum communis producens, *b c*; non communes, *a*, *d*. Et denominante *a b c*, numeratorem *d b c*; necnon denominante *a*, numeratorem *b*, fiant fractiones *dbc* (*abc*), *d* (*a*).

Dico *dbc* (*abc*): *d* (*a*).

Demonstr.

def.29b	*abc*; *u*: *dbc*; *dbc* (*abc*).
2. *p.*	*abc*; *dbc*: *u*; *dbc* (*abc*).
9. *h.*	*a*; *d*: *abc*; *dbc*.
11. 5.	*a*; *d*: *u*; *dbc* (*abc*).

2. p. | a; u: d; dbc (abc).
def. 29h | a; u: d; d (a).
9. 5. | dbc (abc): d (a). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. *Prop.* 13.

FRactiones, quarum numeratores æquales, & denominatores arithmeticè diſpoſiti, ſunt harmonicè diſpoſitæ.

Hypoth.

Eſto quatuor fractionum numerator communis a, & ſunto denominatores arithmeticè diſpoſiti b, c, d, e.

Dico a (b), a (c), a (d), a (e) eſſe harmonicè diſpoſitas.

Demonſtr.

12. h. | Si differentia b, c, eſt defectus: ergo reciprocè differentia a (b), a (c), eſt exceſſus: & eſt differentia d, e, defectus: & reciprocè differentia a (d), a (e) eſt exceſſus. Quod ſi differentia b, c, eſt exceſſus: etiam differentia d, e, eſt exceſſus: & differentia a (b), a (c), reciprocè eſt defectus: necnon differentia a (d), a (e), eſt defectus. Quare factionum a (b), a (c), & a (d), a (e), ſimiles ſunt differentiæ. Eſto differentia b, c, defectus. Ergo differentia a (b), a (c) eſt exceſſus: item differentia a (d), a (e).

hypoth. | $c - b$: $e - d$.

pro-

producendo per ade, & abc.

9. b. $acde - abde; abce - abcd: ade; abc: de; bc$.

denominando communiter per $bcde$.

13. b. $a(b) - a(c); a(d) - a(e): de; bc$.

8. b. $de; bc: d; b, + e; c$.

12. b. $d; b: a(b); a(d)$.

12. b. $e; c: a(c); a(e)$.

p. p. $de; bc: a(b); a(d), + a(c); a(e)$.

11. 5. $a(b) - a(c); a(d) - a(e): a(b); a(d), + a(c); a(e)$.

def. 13. b $a(b), a(c), a(d), a(e)$ ſunt harmonicè diſpoſitæ. Quod &c.

Similiter oſtendetur, ſi differentia b, c, eſt exceſſus.

Quare &c.

Theor. 15. *Prop.* 15.

FRactiones, quarum numeratores æquales, & denominatores arithmeticè ordinati, ſunt harmonicæ ordinatæ.

Hypoth.

Eſto fractionum numerator communis a: & ſunto denominatores arithmeticè ordinati, b, c, d, e.

Dico $a(b), a(c), a(d), a(e)$ eſſe harmonicè ordinatas.

Demonſtr.

hypoth. b, c, d, ſunt arithmeticè ordinati.

$b, c,$

def.5.h. | b, c, c, d, sunt arithmeticè dispositi.

14.h. | a (b), a (c), a (c), a (d), sunt harmonicè dispositæ.

Differentia a (b), a (c), ad similem differentiam a (c), a (d), rationem habet compositam ex rationibus, a (b) ad a (c), & a (c) ad a (d): ideſt eamdem, quàm habet a (b) ad a (d).

def.13h *def.5.6.*

def.18h | a (b), a (c), a (d), sunt harmonicè ordinatæ.

sup. | a (c), a (d), a (e), sunt harmonicè ordinatę.

def.19h | a (b), a (c), a (d), a (e), sunt harmonicè ordinatæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

SI aliquot fractiones, aliæque totidem, communem habentes numeratorem, denominatores habuerint similiter arithmeticè dispositos, erunt & ipsæ similiter harmonicè dispositæ.

Hypoth.

Sunto tres fractiones, aliæque tres, quarum communis numerator a: sint autem denominatores b, c, d, similiter arithmeticè dispositi, atque denominatores e, f, g.

Dico a (b), a (c), a (d), similiter harmonicè dispositas esse, atque a (e), a (f), a (g).

Demonstr.

hypoth. | b, c, d, sunt similiter arithmeticè dispositi, atque e, f, g. b, c, e,

def.8.h. | b, c, e, f, sunt arithmeticè dispositi.
| c, d, f, g, sunt arithmeticè dispositi.
14.h. | a (b), a (c), a (e), a (f), sunt harmonicè dispositæ.
| a (c), a (d), a (f), a (g), sunt harmonicè dispositæ.
def.16 h | a (b), a (c), a (d), sunt similiter harmonicè dispositæ, atque a (e), a (f), a (g). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 17. *Prop.* 17.

IN serie arithmetica, non maior, quàm dimidius termini proximi, non est medius.

Hypoth.

Sunto in serie arithmetica, tres termini a, b, c.
Dico b, maiorem esse, quàm dimidium, ad c.

Demonstr.

| Esto b, non maior, quàm dimidius ad c, si potest: eritque b, ęqualis, vel minor, quàm dimidius ad c: eritque differentia b, c, defectus: cuius
def. 10. | similis differentia a, b, erit defectus.
hypoth. | b; c: non maior, quàm dimidius.
19. 7. | $2b$: non maior, quàm c.
| b: non maior, quàm $c-b$.
def.10.h. | $c-b$: $b-a$.
| b: non maior, quàm $b-a$.
| $b+a$: non maior, quàm b. quod est absurdum.

b non

b non est dimidius ad c. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 18. *Prop.* 18.

IN serie harmonica, terminus non minor, quàm duplus termini proximi, non est medius.

Hypoth.

Sunto in serie harmonica tres termini a, b, c.
Dico b, minorem esse, quàm duplum, ad c.

Demonstr.

Esto b, non minor, quàm duplus ad c, si potest. eritque differentia b, c, excessus: item differentia a, b, erit excessus.

def.18.b $a - b$; $b - c$: a; c.

hypoth. b; c: non minor, quàm duplus.

19. 7. b: non minor, quàm $2c$.

$b - c$: non minor, quàm c.

14. 5. $a - b$: non minor, quàm a. Quod est absurdum.

b, minor est, quàm duplus ad c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 19. *Prop.* 19.

QVælibet quantitas, & omnes eius multiplices ordinatæ, sunt in serie arithmetica naturali.

Hypoth.

Esto quantitas u, cuius multiplices ordinatæ $2u$, $3u$, $4u$, & c.

Dico

Dico u, $2u$, $3u$, $4u$, & c. esse in serie arithmetica naturali.

Demonstr.

Omnes differentiæ u, $2u$, & $2u$, $3u$, & $3u$,
hypoth. $4u$, & reliquæ, sunt similes, & æquales ipsi ratio-
def.12.b nali u: & est u ad $2u$ dimidia. Ergo u, $2u$, $3u$, $4u$, & c. sunt in serie arithmetica naturali.
Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. *Prop.* 20.

Qvælibet quantitas, & omnes eius submultiplices ordinatæ, sunt in serie harmonica naturali.

Hypoth.

Esto quantitas u, cuius submultiplices u (2), u (3), u (4), &c.

Dico u, u (2), u (3), u (4), &c. esse in serie harmonica naturali.

Demonst.

19. b. u, 2, 3, 4, &c. sunt in serie arithmetica.
15. b. u, u (2), u (3), u (4), &c. sunt in serie harmonica.
hypoth. u; u (2): est dupla.
def.20.b u, u (2), u (3), u (4), &c. sunt in serie harmonica naturali. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. *Prop.* 21.

IN duabus seriebus arithmeticis naturalibus, termini sunt similiter proportionales, in proportione ordinata.

Hypoth.

Sint duæ series arithmeticæ naturales: vna a, $2a$, $3a$, $4a$, &c. altera b, $2b$, $3b$, $4b$, &c.

Dico a, $2a$, $3a$, $4a$, esse similiter proportionales atque b, $2b$, $3b$, $4b$, in proportione ordinata.

Demonstr.

def.11.h. Defectus deinceps a, $2a$, $3a$, $4a$, sunt æquales inter se, & ipsi primo termino a. item defectus deinceps b, $2b$, $3b$, $4b$, sunt æquales inter se, & ipsi b.

def.12.h a; $2a$: b; $2b$.

2. p. $2a$; $3a$: $2b$; $3b$:

2. p. $3a$; $4a$: $3b$; $4b$.

def.18.5 a, $2a$, $3a$, $4a$, sunt similiter proportionales, atque b, $2b$, $3b$, $4b$, in proportione ordinata. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. *Prop.* 22.

IN duabus seriebus harmonicis naturalibus, termini sunt similiter proportionales, in proportione ordinata.

Hypoth.

Sint duæ series harmonicæ naturales: vna, a, $a\,(2)$, $a\,(3)$, $a\,(4)$: altera b, $b\,(2)$, $b\,(3)$, $b\,(4)$.

Dico

Dico a, a (2), a (3), a (4), esse similiter proportionales, atque b, b (2), b (3), b (4), in proportione ordinata.

Demonstr.

def. 20h	a; a (2): b; b (2).
2. p.	a,—a (2); a (2): b,—b (2); b (2).
	Esto, si potest, a (2); a (3): maior, quàm b (2); b (3).
4. 3.	a (2); a (2)—a (3): minor, quàm b (2); b (2)—b (3).
p. 3.	a,—a (2); a (2)—a (3): minor quàm b,—b (2); b (2)—b (3).
def. 18h	a,—a (2); a (2)—a (3): a; a (3).
def. 18h	b,—b (2); b (2)—b (3): b; b (3).
p. 3.	a; a (3): minor, quàm b; b (3).
def. 20h	a (2); a: b (2); b.
p. 3.	a (2); a (3): minor, quàm b (2); b (3). contra suppositum.
	a (2); a (3): b (2); b (3).
sup.	a (3); a (4): b (3); b (4).
def. 18. 5	a, a (2), a (3), a (4) sunt similiter proportionales, atque b, b (2), b (3), b (4) in proportione ordinata. Quod &c. Quare &c.

Theor. 23. *Prop.* 23.

Duarum serierum naturalium arithmeticę, & harmonicè, inter æqueordinatos terminos, medij pro-

portionales sunt æquales.

Hypoth.

Sint duæ series naturales: vna arithmetica, ab *a*; altera harmonica, à *b*. & sint quarti termini; in arithmetica, 4*a*; in harmonica, *b* (4). sit autem inter *a*, *b*, media proportionalis *c*.

Dico *c*, mediam proportionalem esse, inter 4*a*, & *b* (4).

Demonstr.

Quoniam 4*a*, *b* (4), sunt quarti termini, in

19. h. suis seriebus: 4*a* ad *a*, est quadruplus: & *b* (4) ad

20. h. *b* subquadruplus.

4*a*; *a*: *b*; *b* (4).

hypoth. *a*; *c*: *c*; *b*.

p. p. 4*a*; *c*: *c*; *b* (4). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 24. Prop. 24.

IN serie arithmetica duo termini, cum æqueordinatis in harmonica, sunt reciprocè proportionales.

Hypoth.

Sint in serie arithmetica duo termini 3*a*, 4*a*: & in harmonica duo æqueordinati *b* (3); *b* (4).

Dico 3*a*; 4*a*: *b* (4); *b* (3).

Præpar.

Assumatur inter æqueordinatos 3*a*, & *b* (3), medius proportionalis *c*.

De-

Demonstr.

construct.	3*a*; *c*: *c*; *b* (3).
23. *h.*	4*a*; *c*: *c*; *b* (4).
2. *p.*	*c*; 4*a*: *b* (4); *c*.
p. p.	3*a*; 4*a*: *b* (4); *b* (3). Quod &c.

Quare &c.

Theor, 25. *Prop*. 25.

Series naturales, arithmetica, & harmonica, plures terminos habent, quàm quot quiſque dixerit, & cuiuſq; numeroſæ rationis.

Demonſtr.

20. 9. Nam numeri plures ſunt, quàm quot quiſque
19. *h.* dixerit, ſecundum quos accepti multiplices ad
20. *h.* primum terminum in ſerie arithmetica, & ſubmultiplices ad primum in harmonica, ſunt plures termini, quàm quot quiſque dixerit,

Quod ſi multiplices accepti fuerint, ſecundum
21. *h.* numeros numeroſæ rationis: erunt in arithmetica ſerie termini, eamdem numeroſam habentes rationem. item ſi accepti fuerint ſubmultiplices:
24. *h.* erunt in harmonica, termini, eamdem reciprocè numeroſam habentes rationem.

Deinde numeri bini, eamdem numeroſam habentes rationem, minimi omnium, & minimorum
20. 9. æquemultiplices numeri, ſecundum plures, quàm quot quiſque dixerit numeros, poſſunt accipi: ſecun-

sup. cundum quos acceptos binos numeros, termini multiplices in arithmetica, & submultiplices in harmonica, possunt accipi bini plures, quàm quot quisque dixerit, eamdem numerosam habentes rationem.

Quare &c.

Theor. 26. Prop. 26.

IN serie arithmetica naturali ab vnitate, termini sunt, vnitas, & omnes numeri ordinatim accepti.

Demonstr.

Nam in serie arithmetica naturali ab vnitate,
19. b. omnes termini sunt, ipsa vnitas, & omnes multiplices ad vnitatem, ordinatim accepti: sed numeri sunt multiplices ad vnitatem; & eorum ordo, est idem multiplicium. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Prop. 27.

IN serie harmonica naturali à rationali, termini sunt, ipsa rationalis, & fractiones, pro communi numeratore, habentes rationalem, & pro denominatoribus, habentes ordinatim omnes numeros.

Demonstr.

Nam in serie harmonica naturali à rationali,
20. b. termini sunt, ipsa rationalis, & omnes eius sub-
def. 29 b multiplices ordinatim accepti. Sed fractiones,

in

in quibus ipsa rationalis est numerator communis, & omnes numeri sunt denominatores, ipsæ sunt submultiplices ad rationalem; & earum ordo, est idem ordo numerorum, per quos ipsæ submultiplices ordinantur. Ergo &c,

Quare &c.

Theor. 28. Prop. 28.

SI fuerint duæ series totidem terminorum; & inter primos, idem fuerit medius proportionalis, qui inter secundos, inter tertios, & deinceps inter æqueordinatos: siquidem in prima serie, sunt quatuor arithmeticè dispositi; in secunda serie, sunt quatuor harmonicè dispositi.

Hypoth.

Sint in prima serie, quatuor arithmeticè ordinati, a, $a+b$, c, $c+b$: sit medius d: & sint in altera serie ordinati $d2\ (a)$, $d2\ (a+b)$, $d2\ (c)$, $d2\ (c+b)$.

Dico $d2\ (a)$, $d2\ (a+b)$, $d2\ (c)$, $d2\ (c+b)$ esse harmonicè dispositos.

Demonstr.

hypoth. Quoniam a ad d, est vt d ad $d2\ (a)$; ideſt quatuor proportionalium prima quantitas

11. h. est a, secunda & tertia est d: ergo quarta est fractio, cuius numerator, secunda potestas d; denominator, prima quantitas a. Similiter ostendetur quod $d2\ (a+b)$, est secunda potestas d, denominata per $a+b$: & $d2\ (c)$, secunda potestas d, denominata per c: & denique $d2$ $(c+b)$,

($c+b$), secunda potestas d, denominata per $c+b$: Ergo $d2(a)$; $d2(a+b)$; $d2(c)$; $d2(c+b)$, sunt quatuor fractiones: quarum numerator communis, secunda potestas d; denominatores verò, sunt quatuor arithmeticè dispositi, a, $a+b$, c, c
14. h. $+d$. Ergo $d2(a)$, $d2(a+b)$, $d2(c)$, $d2(c+b)$, sunt harmonicè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. *Propos.* 29.

Quorum productorum quidam sunt communes, quidam non communes producentes, aggregatum, est productus producentium communium, & aggregati producentium non communium.

Hypoth.

Duorum productorum ab, ac, communis producens esto a: non communes sunto b, c; quorum summa d.

Dico $ab+ac$: ad.

Demonstr.

9. h. | ab; ac: b; c.
2. p. | $ab+ac$; ac: $b+c$; c.
hypoth. | $b+c$: d.
7. 5. | $ab+ac$; ac: d; c.
9. h. | ad; ac: d; c.
11. 5. | $ab+ac$; ac: ad; ac.
9. 5. | $ab+ac$: ad. Quod &c. Quarè &c.

Theor. 30. *Prop.* 30.

QVorum productorum quidam sunt communes, quidam non communes, & inæquales producentes, differentia, est productus producentis communis, & differentiæ producentium non communium.

Hypoth.

Duorum productorum *ab*, *ac*, communis producens esto *a*, non communes sunto *b*, *c*: & esto *b* maior, quàm *c*; quorum differentia *d*.

Dico *ab*—*ac*: *ad*.

Demonstr.

9. *b.*	*ab*; *ac*: *b*; *c*.
2. *p.*	*ab*—*ac*; *ac*: *b*—*c*; *c*.
hypoth.	*b*—*c*: *d*.
7. 5.	*ab*—*ac*; *ac*: *d*; *c*.
9. *b.*	*ad*; *ac*: *d*; *c*.
11. 5.	*ab*—*ac*: *ad*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 31. *Prop.* 31.

QVatuor proportionalium productus extremorum, est æqualis producto mediorum.

Hypoth.

Sunto proportionales *a*; *b*: *c*; *d*.

Dico *ad*: *bc*.

Præpar.

Assumatur productus alternorum *ac*.

Demonstr.

9. *h.*	*ac*; *ad*: *c*; *d*.
9. *h.*	*ac*; *bc*: *a*; *b*.
hypoth.	*a*; *b*: *c*; *d*.
11. 5.	*ac*; *ad*: *ac*; *bc*.
9. 5.	*ad*: *bc*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 32. *Prop.* 32.

QVatuor termini, quorum extremorum productus est æqualis producto mediorum, sunt proportionales.

Hypoth.

Quatuor terminorum *a*, *b*, *c*, *d*, productus extremorum *ad*, & productus mediorum *bc*, sunt æquales.

Dico *a*; *b*: *c*; *d*.

Præpar.

Assumatur productus alternorum *ac*.

Demonstr.

7. 5.	*ac*; *bc*: *ac*; *ad*.
9. *h.*	*ac*; *bc*: *a*; *b*.
9. *h.*	*ac*; *ad*: *c*; *d*.
11. 5.	*a*; *b*: *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. *Prop.* 33.

SI fuerint duæ series totidem terminorum; & inter primos idem fuerit medius proportionalis, qui inter secun-

cundos, inter tertios, & deinceps inter æqueordinatos: siquidem in prima serie, sunt quatuor harmonicè dispositi; in secunda serie, sunt quatuor arithmeticè dispositi.

Hypoth.

Sint in prima serie quatuor harmonicè ordinati *a*, *b*, *c*, *d*: & sit medius *e*: & sint in altera serie ordinati *e*2 (*a*), *e*2(*b*), *e*2 (*c*), *e*2 (*d*).

Dico *e*2 (*a*), *e*2 (*b*), *e*2 (*c*), *e*2 (*d*), esse arithmeticè dispositos.

Demonstr.

*def.*13.*h*	*a*—*b*; *c*—*d*: *a*; *c*,+*b*; *d*.
8. *h*.	*ab*; *cd*: *a*; *c*,+*b*; *d*.
11, 5.	*a*—*b*; *c*—*d*: *ab*; *cd*.
30. &	*acd*—*bcd*: *abc*—*abd*.
31.*h*.	adhibito communi producente *e*2.
9. *h*.	*e*2*acd*— *e*2*bcd*: *e*2*abc*—*e*2*abd*.
	communiter denominando per *abcd*.
10.&13. *h*.	*e*2 (*b*)—*e*2 (*a*): *e*2 (*d*)—*e*2 (*c*).
def.5.*h*.	*e*2 (*a*), *e*2 (*b*), *e*2 (*c*), *e*2 (*d*), sunt arithmeticè dispositi. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. *Prop.* 34.

QVatuor termini harmonicè dispositi, permutando, sunt harmonicè dispositi.

Hypoth.

Sint quatuor termini *a*, *b*, *c*, *d*, harmonicè dispositi.

Demonstr.

9. *h.*	*ac*; *ad*: *c*; *d*.
9. *h.*	*ac*; *bc*: *a*; *b*.
hypoth.	*a*; *b*: *c*; *d*.
11. 5.	*ac*; *ad*: *ac*; *bc*.
9. 5.	*ad*: *bc*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 32. *Prop.* 32.

QVatuor termini, quorum extremorum productus est æqualis producto mediorum, sunt proportionales.

Hypoth.

Quatuor terminorum *a*, *b*, *c*, *d*, productus extremorum *ad*, & productus mediorum *bc*, sunt æquales.

Dico *a*; *b*: *c*; *d*.

Præpar.

Assumatur productus alternorum *ac*.

Demonstr.

7. 5.	*ac*; *bc*: *ac*; *ad*.
9. *h.*	*ac*; *bc*: *a*; *b*.
9. *h.*	*ac*; *ad*: *c*; *d*.
11. 5.	*a*; *b*: *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. *Prop.* 33.

SI fuerint duæ series totidem terminorum; & inter primos idem fuerit medius proportionalis, qui inter secun-

cundos, inter tertios, & deinceps inter æquecordinatos : siquidem in prima serie, sunt quatuor harmonicè dispositi; in secunda serie, sunt quatuor arithmeticè dispositi.

Hypoth.

Sint in prima serie quatuor harmonicè ordinati *a*, *b*, *c*, *d*: & sit medius *e*: & sint in altera serie ordinati *e*2 (*a*), *e*2 (*b*), *e*2 (*c*), *e*2 (*d*).

Dico *e*2 (*a*), *e*2 (*b*), *e*2 (*c*), *e*2 (*d*), esse arithmeticè dispositos.

Demonstr.

def. 13. h | *a*—*b*; *c*—*d*: *a*; *c*, +*b*; *d*.
8. h. | *ab*; *cd*: *a*; *c*, +*b*; *d*.
11, 5. | *a*—*b*; *c*—*d*: *ab*; *cd*.
30. & 31. h. | *acd*—*bcd*: *abc*—*abd*. adhibito communi producente *e*2.
9. h. | *e*2*acd*—*e*2*bcd*: *e*2*abc*—*e*2*abd*. communiter denominando per *abcd*.
10. & 13. h. | *e*2 (*b*)—*e*2 (*a*): *e*2 (*d*)—*e*2 (*c*).
def. 5. h. | *e*2 (*a*), *e*2 (*b*), *e*2 (*c*), *e*2 (*d*), sunt arithmeticè dispositi. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. *Prop.* 34.

Quatuor termini harmonicè dispositi, permutando, sunt harmonicè dispositi.

Hypoth.

Sint quatuor termini *a*, *b*, *c*, *d*, harmonicè dispositi.

 Dico

Dico permutando *a, c, b, d* esse harmonicè dispositos.

Præpar.

Assumatur quælibet quantitas *e*, & fiat

a; *e*: *e*; *f*.
b; *e*: *e*; *g*.
c; *e*: *e*; *h*.
d; *e*: *e*; *l*.

Demonstr.

hypoth.	*a, b, c, d* sunt harmonicè dispositi.
33. *h.*	*f, g, h, l* sunt arithmeticè dispositi.
4. *h.*	*f, h, g, l* sunt arithmeticè dispositi.
28. *h.*	*a, c, b, d* sunt harmonicè dispositi. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 35. Prop. 35.

SI fuerint aliquot quantitates in una serie, similiter harmonicæ dispositæ, atque aliæ totidem, in altera: erunt ex æqualitate harmonica, prima & vltima, in vna serie, item prima & vltima, in altera, dispositæ harmonicè.

Hypoth.

Sint *a, b, c* similiter harmonicè dispositæ, atque aliæ totidem *d, e, f*.

Dico ex æqualitate harmonica, esse dispositas harmonicè, *a, c*, & *d, f*.

Præpar.

Assumatur quælibet quantitas *g*. & fiat

a; *g*;

a; *g*: *g*; *h*
b; *g*: *g*; *k*
c; *g*: *g*; *l*
d; *g*: *g*; *m*
e; *g*: *g*; *n*
f; *g*: *g*; *o*.

Demonstr.

def.16b | *a*, *b*, *d*, *e* sunt harmonicè dispositæ.
33. b. | *h*, *k*, *m*, *n* sunt arithmeticè dispositæ.
def.16b | *b*, *c*, *e*, *f* sunt harmonicè dispositæ.
33. b. | *k*, *l*, *n*, *o* sunt arithmeticè dispositæ.
def.8.b. | *h*, *k*, *l* sunt similiter arithmeticè dispositæ, atque *m*, *n*, *o*.
5. b. | *h*, *l*, *m*, *o* sunt arithmeticè dispositæ.
28. b. | *a*, *c*, *d*, *f* sunt harmonicè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 36. Prop. 36.

HArmonicè dispositarum ęquesubmultiplices, sunt harmonicè dispositæ.

Hypoth.

Sint harmonicè dispositæ *a*, *b*, *c*, *d*: quarum æque submultiplices *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3).

Dico *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3) esse harmonicè dispositas.

Præpar.

Assumatur quælibet quantitas *e*. & fiat

a; *e*:

$a; e: e; f$
$b; e: e; g$
$c; e: e; h$
$d; e: e; l$.

Et quotuplices sunt a, b, c, d ad $a(3)$, $b(3)$, $c(3)$, $d(3)$, totuplices accipiantur ipsarum f, g, h, l, quæ quæ sint $3f$, $3g$, $3h$, $3l$.

Demonstr.

hypoth.	a, b, c, d, sunt harmonicè dispositæ,
33. *h.*	f, g, h, l, sunt arithmeticè disposite.
6. *h.*	$3f$, $3g$, $3h$, $3l$, sunt arithmeticè dispositæ.
præpar.	$a(3); a: f; 3f$.
præpar.	$a; e: e; f$.
p. p.	$a(3); e: e; 3f$.
sup.	$b(3); e: e; 3g$.
sup.	$c(3); e: e; 3h$.
sup.	$d(3); e: e; 3l$.
28. *h.*	$a(3)$, $b(3)$, $c(3)$, $d(3)$ sunt harmonicè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 37. Prop. 37.

SI fuerint aliquot primæ quãtitates, arithmeticè similiter dispositæ, atque aliæ totidem secundæ, vtræque in vna serie: fuerint autem & aliæ totidem quantitates primę, aliæque totidem secundæ in altera: & fuerit vna eadem quantitas media proportionalis inter primas primarum, & in-

& inter secundas primarum, & deinceps inter æqueordinatas; item inter primas secundarum, & inter secundas, & deinceps inter æqueordinatas: erunt in secunda serie primæ similiter harmonicè ordinatæ, atque secundæ.

Demonstr.

Quoniam enim primarum in prima serie prima, & secunda; & secundarum in prima serie prima, & secunda, sunt arithmeticè dispositæ: constat, quod etiam in secunda serie primarum prima, & secunda; & secundarum prima, & secunda, sunt harmonicè dispositę. constat similiter, quod in secunda serie, primarum secunda, & tertia; & secundarum secunda, & tertia sunt harmonicè dispositæ. Et ita deinceps vsque ad vltimas primarum, & secundarum. Quare primæ in secunda serie, sunt similiter harmonicè ordinatę, atque secundæ.

def.8.h. 28. h. def.16.h

Theor. 38. Prop. 38.

SI fuerint aliquot primæ quantitates harmonicè similiter dispositæ, atque aliæ totidem secundæ, vtræque in vna serie: fuerint autem & aliæ totidem quantitates primę, aliæque totidem secundæ, in altera serie: & fuerit vna eadem quantitas media proportionalis inter primas primarum, & inter secundas primarum, & deinceps inter æqueordinatas; necnon media proportionalis inter primas secundarum, & inter secundas secundarum, & deinceps

ceps inter æquecordinatas: erunt in altera serie, primæ similiter arithmeticè dispositæ, atque secundæ.

Demonst.

def.16h | Quoniam enim primarum in prima serie, prima & secunda, & secundarum in prima serie, prima & secunda, sunt harmonicè dispositæ: constat, (*33. h.*) quod & in secunda serie, primarum prima & secunda, & secundarum prima & secunda, sunt arithmeticè dispositæ. item ostendetur, quod primarum in secunda serie secunda, & tertia, & secundarum secunda & tertia, sunt arithmeticè disposite. & sic deinceps vsque ad vltimas primarum, (*def.8.h.*) & secundarum. Quare primæ in secunda serie, sunt similiter arithmeticè dispositæ, atque secũdę.

Theor. 39. Prop. 39.

INter duas quantitates media proportionalis, eadem est etiam inter submultiplicem vnius, & æquemultiplicem alterius.

Hypoth.

Esto inter duas *a*, *b*, media proportionales *c*: & esto ipsius *a*, submultiplex *a*(3); & ipsius *b*, æquemultiplex 3*b*.

Dico *a*(3); *c*: *c*; 3*b*.

Demonstr.

hypoth. | *a*(3); *a*: *b*; 3*b*.

hypoth. | *a*; *c*: *c*; *b*.

p. p. | *a*(3); *c*: *c*; 3*b*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 40. Prop. 40.

IN ſerie harmonica naturali, aliquoteni ab vno, & aliquoteni ab altero, per numeros alterutrorum multitudinis terminorum ſubmultiplicati; ſicut primi quotientes, ſimiliter ſecundi, ſunt harmonicè diſpoſiti: item tertij, & quarti, & ſic deinceps.

Hypoth.

Sint in ſerie harmonica naturali duo termini *a*, *b*: & ab *a*, ſumantur terni ſubquadrupli; & à *b*, quaterni ſubtripli.

Dico primos ternos ſubquadruplos ab *a*, & primos ſubtriplos à *b*, ſimiliter eſſe diſpoſitos harmonicè; atque ſecundos ſubquadruplos ternos ab *a*, & ſecundos ſubtriplos quaternos à *b*.

Præpar.

Ordinetur ſeries arithmetica naturalis: in qua ſint, *c* æqueordinatus, atque *a*; & *d* æqueordinatus, atque *b*. ſumanturque quadrupli terni à *c*, & tripli quaterni à *d*. ſumatur etiam inter *a*, & *c* medius proportionalis *e*.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam *e*, medius proportionalis eſt inter *a*, *c*: medius etiam proportionalis eſt inter *b*, *d*; &
23. *b.* inter æqueordinatos terminos in vtraque ſerie na-
39. *b.* turali arithmetica, & harmonica. item eſt medius proportionalis inter multiplices terminorum arithmeticæ ſeriei naturalis, & inter æqueſubmulti-
7. *b.* plices terminorum harmonicæ. ſed quadrupli terni à *c*, & tripli quaterni à *d*, primi, ſunt ſimiliter

arithmeticè diſpoſiti, atque ſecundi; item, atque
37. *h.* tertij, atque quarti, & deinceps. Ergo etiam ſubquadrupli terni ab a, & ſubtripli quaterni à b, primi, ſunt ſimiliter harmonicè diſpoſiti, atque ſecundi; item, atque tertij, atque quarti, & deinceps. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 41. *Propoſ.* 41.

SVmma fractionum communem habentium denominatorem, eſt ſumma numeratorum, ab eodem denominatore denominata.

Hypoth.

Fractiones $a(b)$, $c(b)$ communem habent denominatorem: numeratorum ſumma eſt $a+c$.

Dico $a(b)+c(b)$: $a+c(b)$.

Demonſtr.

10. *h.* | $a(b)$; $c(b)$: a; c.
2. *p.* | $a(b)+c(b)$; $c(b)$: $a+c$; c.
10. *h.* | $a+c(b)$; $c(b)$: $a+c$; c.
11. 5. | $a(b)+c(b)$; $c(b)$: $a+c(b)$; $c(b)$.
9. 5. | $a(b)+c(b)$: $a+c(b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 42. *Prop.* 42.

DIfferentia fractionum communem habentium denominatorem, eſt differentia numeratorum, ab eodem

dem denominatore denominata.

Hypoth.

Fractiones $a(b)$, $c(b)$, communem habent denominatorem b: differentia numeratorum est $a --- c$.

Dico $a(b) --- c(b)$: $a --- c(b)$.

Demonstr.

10. *b.* | $a(b)$; $c(b)$: a; c.
2. *p.* | $a(b) --- c(b)$; $c(b)$: $a --- c$; c.
10. *b.* | $a --- c(b)$; $c(b)$: $a --- c$; c.
11. 5. | $a(b) --- c(b)$; $c(b)$: $a --- c(b)$; $c(b)$.
9. 5. | $a(b) --- c(b)$: $a --- c(b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 43. Prop. 43.

DVorum inęqualium numerorum, vnitas denominata à minore, & differentia denominata à maiore, sunt fractiores duæ, quarum summa est maior, quàm differentia eorumdem, aucta vnitate, denominata à maiore.

Hypoth.

Sunto duo inæquales numeri, minor a, maior $a+b$.

Dico $1(a) + b(a+b)$: maiorem esse, quàm $b+1(a+b)$.

Demonstr.

12. *b.* | $1(a)$; $1(a+b)$: $a+b$; a.
| $1(a)$: maior quàm $1(a+b)$.
| communiter addatur $b(a+b)$.
41. *b.* | $1(a) + b(a+b)$: maior est, quàm $b+1(a+b)$.
| Quod &c. Quare &c.

Theor. 44. *Prop.* 44.

QValibet quantitate, à se ipsa, & à suis deinceps per ordinem multiplicibus, denominata; fit series harmonica naturalis.

Hypoth.

Esto quælibet quantitas a, eiusque multiplices $2a$, $3a$, $4a$, & deinceps.

Dico $a(a)$, $a(2a)$, $a(3a)$, $a(4a)$, & deinceps esse seriem harmonicam naturalem.

Præpar.

Esto rationalis u: & à rationali ordinetur series harmonica naturalis u, $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$, & deinceps.

Demonstr.

def. 29*h*	a; u: a; $a(a)$.
9. 5.	u: $a(a)$.
12. *h.*	$a(a)$; $a(2a)$: $2a$; a: u; $u(2)$ dupla.
9. 5.	$a(2a)$: $u(2)$.
sup.	$a(3a)$: $u(3)$.
sup.	$a(4a)$: $u(4)$.
def. 20*h*	$a(a)$, $a(2a)$, $a(3a)$, $a(4a)$, est series harmonica naturalis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 45. *Prop.* 45.

SI fuerint duo prologarithmi, ex terminis ab vnitate; alter, ex quotcunque terminis; alter, ex totidem, & vno amplius: erit qui ex pluribus, eo qui ex paucioribus, perspectè maior. *Hy-*

Hypoth.

Sunto duo prologarithmi, ex terminis ab vnitate: alter *A*, ex tot terminis, quotus est numerus *b*: alter *C*, ex tot, quotus est *d*. & esto *d*, vnitate maior, quàm *b*.

Dico *C*, perspectè maiorem esse, quàm *A*.

Præpar.

l *m* *n*

e . . . . *k*

f *g* *h* *i*

Sumatur numerus *b* toties, quotus est *d*: & sint sumpti numeri *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*. Item sumatur numerus *d* toties, quotus est *b*: & sint sumpti *el*, *lm*, *mn*, *nk*.

Demonstr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, est æqualis producto *d* per *b*: summa numerorum *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, est æqualis summæ numerorum *el*, *lm*, *mn*, *nk*, estque idem numerus *e*k. Et quoniam *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *i*k, sunt æquales inter se: ergo *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *e*k, sunt simplex *b*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices. Item quoniam *el*, *lm*, *mn*, *n*k, sunt æquales: ergo *el*, *em*, *en*, *e*k, sunt simplex *d*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices.

Deinde quoniam *d*, vnitate maior est, quàm *b*: ergo 2*d*, binario maior est, quàm 2*b*: & 3*d*, ternario maior est, quàm 3*b*: & sic deinceps, & similiter *el*, vnitate maior, quàm *ef*: & *em*, binario maior, quàm *eg*: & *en*, ternario

maior,

l m n
e . . . . K
f g h i

maior quàm *ek*: & ſic deinceps. item ſimiliter *nk*, vnitate maior, quàm *ik*: & *mk*, binario maior, quàm *hk*: & *lk*, ternario maior, quàm *gk*. Quare *fl*, *gm*, *hn*, & deinceps, ſunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps: item *in*, *hm*, *gl*, ſunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps. Eſt ergo *ef*, vnitate maior, quàm *lg*; & *lg*, vnitate maior, quàm *mh*; & *mh*, vnitate maior, quàm *ni*; & *ni*, eſt vnitas.

Cum itaque tres ſint quantitates inæquales *ef*, *el*, *eg*, quarum *ef* minima, *el* media, *eg* maxima.
3. h. ſi *lg*, vnitate aucta, denominetur ab *ef*; & *fl*, ab *eg*: fiunt duæ fractiones, quarum ſumma, maior eſt, quàm *fg* vnitate aucta, denominata ab *el*. Sed *lg*, vnitate aucta, eſt *ef*; & *fg*, vnitate aucta, eſt *el*: ergo

ef (*ef*)+*fl* (*eg*): maior eſt, quàm *el* (*el*).

Similiter oſtendetur,

lg (*eg*)+*gm* (*eh*): maior, quàm *lm* (*em*).

Et *ml* (*eh*)+*hn* (*ei*): maior, quàm *mn* (*en*).

Deinde, cum duo ſint inæquales numeri, *ei*,
43. h. *ek*; quorum minor *ei*, maior *ek*, differentia *ik*: ſitque vnitas *ni*: & differentia *ik*, vnitate aucta, ſit *nk*. ergo

ni (*ei*)+*iK* (*eK*): maior eſt, quàm *nK* (*eK*.

44. h. Sed *ef* (*ef*), *fl*+*lg* (*eg*), *gm*+*mh* (*eh*), *hn*+*ni*- (*ei*),

(ei), $iK(eK)$ sunt termini componentes prologarithmum C. nam ef, $fl+lg$, $gm+mh$, $hn+ni$, iK, sunt numeratores æquales ipsi b, quos denominant, ef, eg, eh, ei, eK, nempe simplex b, duplex, triplex, & deinceps multiplices.

Eadem ratione constat, quod $el(el)$, $lm(em)$, $mn(en)$, $nK(eK)$ sunt termini componentes prologarithmum A.

def. 26 b Ergo C, pespectè maior est, quàm A. Quod &c. Quare &c.

Theor. 46. *Prop.* 46.

SI duorum inæqualium numerorum differentia, denominetur à minore; vnitas verò, à maiore: fiunt duæ fractiones; quarum summa, minor est, quàm differentia, vnitate aucta, denominata à minore.

Hypoth.

Sunto duo inæquales numeri a, $a+b$.

Dico $b(a)+1(a+b)$: minorem esse, quàm $b+1(a)$.

Demonstr.

12. b. $1(a+b)$; $1(a)$: a; $a+b$.

$1(a+b)$: minor, quàm $1(a)$.

addito communi $b(a)$.

41. b. $b(a)+1(a+b)$: minor, quàm $b+1(a)$. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 47. *Prop.* 47.

SI fuerint prologarithmi ex duobus terminis à ſecundo, ex tribus à tertio, ex quatuor à quarto, & ſic deinceps: qui ex pluribus, perſpectè minor eſt, quàm, qui ex paucioribus vno.

Hypoth.

Sint duo prologarithmi; alter *A*, ex terminis ab 1 (*b*); & ex tot terminis, quotus eſt *b*; alter *C*, ex terminis ab 1 (*d*), & ex tot terminis, quotus eſt *d*: & eſto *b*, vnitate minor, quàm *d*.

Conſtat, quod 1 (*b*), totus ordine eſt, quotus, eſt *b*: & 1 (*d*), totus ordine, quotus eſt *d*. *prop.* 27. *h.*

Dico *C*, perſpectè minorem eſſe, quàm *A*.

Præpar.

e --- 20 --- f . . . . . . m . . . . n . . . . o l
g h i k

Sumatur productus *bd*, qui ſit *ef*: eique adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, *kl*: eidemque *ef*, tot *d* adijciantur, quotus eſt *b*, qui ſint *fm*, *mn*, *no*, *ol*.

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, & productus *d* per *b*, ſunt æquales: ſumma numerorum *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, *kl*, ſummæ *fm*, *mn*, *no*, *ol*, eſt æqualis: eſtque idem numerus *fl*. Et quoniam *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, *Kl*, ſunt æquales: ergo *fg*, *fh*, *fi*, *fK*, *fl*, ſunt ſimplex *b*, duplex, triplex, & reliqui deinceps

inceps multiplices. Item quoniam *fm*, *mn*, *no*, *ol*, sunt æquales: ergo *fm*, *fn*, *fo*, *fl*, sunt simplex *d*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices. Sed *ef*, ad *b* totuplex est, quotus est $d+1$: & *eh*, quotus est $d+2$: ideoque *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *eK*, sunt totuplices ad *b*, quoti sunt *d*, $d+1$, $d+2$, $d+3$, $d+4$. Item cum sit *ef*, ad *d* totuplex, quotus est *b*: erunt *ef*, *em*, *en*, *eo*,* totuplices ad *d*, quoti sunt *b*, $b+1$, $b+2$, $b+3$.

Deinde quoniam *d*, vnitate maior est, quàm *b*: ergo $2d$, binario maior est, quàm $2b$: & $3d$, ternario maior, quàm $3b$; & sic deinceps, & similiter *fm*, vnitate maior, quàm *fg*; & *fn*, binario maior, quàm *fh*; & *fo*, ternario maior, quàm *fi*; & sic deinceps. item similiter *ol*, vnitate maior, quàm *Kl*; & *nl*, binario maior, quàm *il*; & *ml*; ternario maior, quàm *hl*. Quare *gm*, *hn*, *io*, sunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps: item *oK*, *ni*, *mh*, sunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps. Ergo *gm*, auctus vnitate, est *hn*; & *hn*, auctus vnitate, est *io*; & *io*, auctus vnitate, est *iK*, vel *b*.

Itaque sunt inæquales, & minores primùm, deinde maiores hoc ordine, *ef*, *eg*, *em*, *eh*, *en*, *ei*, *eo*, *eK*: quorum minimus *ef*, est productus *bd*: & differentia *ef*, *eg*, est *fg*, nempe *b*: est
9.b. autem *bd* ad $b2$, sicut *d* ad *b*, maior: ergo minimus *ef*, non est minor, quàm secunda potestas differentiæ *ef*, *eg*. ideoque neque *eg*, minor est, quàm secunda potestas differentiæ *eg*, *eh*.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad m \qquad\quad n \qquad\quad o \\ e\text{---}20\text{---}f \,.\, l \\ \qquad\qquad\qquad\quad g \qquad\quad h \qquad\quad i \qquad\quad K \end{array}$$

neque *eh*, minor, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *eh*, *ei*. neque *ei*, minor, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *ei*, *ek*.

Quare ſi *fg*, denominetur ab *ef*; & vnitas *gm*,
46. b. denominetur ab *eg*: ſumma fractionum, minor eſt, quàm ſi *fg*, aucta vnitate, denominetur ab *ef*. eſt autem *fg*, aucta vnitate, æqualis ipſi *fm*: ergo

$fg(ef)+gm(eg)$: minor eſt, quàm $fm(ef)$.

2. b. Item ſi *mh* denominetur ab *eg*; & *gm*, aucta vnitate, ideſt *hn* denominetur ab *eh*: ſumma fractionum, minor eſt, quàm ſi *gh*, aucta vnitate, ideſt *mn*, denominetur ab *eh*.

$mh(eg)+hn(eh)$: minor eſt, quàm $mn(eh)$.

Similiter oſtendetur, quod

$ni(eh)+io(ei)$: minor eſt, quàm $no(en)$.

Et quòd

$oK(ei)+Kl(eK)$: minor eſt, quàm $ol(eo)$.

Sed $fg(ef)$, $gm+mh(eg)$, $hn+ni(eh)$, $io+oK(ei)$, $Kl(eK)$, ſunt $1(d)$, $1(d+1)$, $1(d+2)$, & deinceps reliqui termini, tot, quotus eſt *d*, componentes prologarithmum *C*. nam *fg*, eſt *b*: & *ef*, eſt productus *bd*: & $fg(ef)$, eſt $b(bd)$; ideſt, $1(d)$.
13. b. item $gm+mh$ eſt *b*: & *eg*, eſt $bd+b$: & $gm+mh(eg)$, eſt $b(bd+b)$; ideſt, $1(d+1)$. & ſic deinceps.

Simi-

13. *h.* Similiter *fm* (*ef*), *mn* (*em*), *no* (*en*), *ol* (*eo*), ſunt 1 (*b*), 1 (*b*+1), & deinceps reliqui termini, tot, quotus eſt *b*, componentes prologarithmum *A*. nam *fm*, *mn*, *no*, *ol*, ſunt *d*: & *ef*, *em*, *en*, *eo*, ſunt *bd*, *bd*+*d*, *bd*+2*d*, *bd*+3*d*, & ipſę fractiones
13. *h.* ſunt *d* (*bd*), *d* (*bd*+*d*), *d* (*bd*+2*d*), *d* (*bd*+3*d*); ideſt, 1 (*b*), 1 (*b*+1). &c.

def.27 b Ergo *C*, eſt perſpectè minor, quàm *A*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 48. *Prop.* 48.

SI fuerint duæ ſeries prologarithmorum, ex terminis ab vnitate; altera, ex quotcunque terminis; altera, ex totidem, & vno amplius: erit ſecundus prologarithmus ex pluribus, ſecundo ex paucioribus, perſpectè maior: & tertius, tertio: & quartus, quarto: & ſic deinceps ſinguli prologarithmi vnius ſeriei, ſingulis prologarithmis æqueordinatis alterius, perſpectè ſunt maiores.

Hypoth.

Sint duę ſeries prologarithmorum ex terminis ab vnitate: altera *A*, ex tot terminis, quotus eſt numerus *b*: altera *C*, ex tot, quotus eſt *d*. & eſto *d*, vnitate maior, quàm *b*.

Dico ſecundum prologarithmum ſeriei *C*, perſpectè maiorem eſſe, ſecundo ſeriei *A*.

Præpar.

$$\begin{array}{l} \quad l \quad m \quad n \qquad\quad t \quad u \quad x \\ e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots K \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots s \\ \quad f \quad g \quad h \quad i \qquad o \quad p \quad q \quad r \end{array}$$

Sumatur numerus *b* toties, quotus est *d*: & sint sumpti numeri *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *iK*. item numerus *d* toties, quotus est *b*: & sint sumpti numeri *el*, *lm*, *mn*, *nK*. Sumatur iterum *b* toties, quotus est *d*: & sint sumpti numeri *Ko*, *op*, *pq*, *qr*, *rs*. & iterum *d*, sumatur toties, quotus est *b*: & sint sumpti numeri *Kt*, *tu*, *ux*, *xs*.

Demonstr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, est æqualis producto *d* per *b*: summa numerorum *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, summæ numerorum *el*, *lm*, *mn*, *nK*, est æqualis: & summa numerorum *Ko*, *op*, *pq*, *qr*, *rs*, summæ *Kt*, *tu*, *ux*, *xs*, est æqualis. Sunt autem & singulæ partes *ek*, singulis *Ks* partibus æquales; & omnes, omnibus: & *ef*, *el*, *eg*, *em*, *eh*, *en*, *ei*, *ek*, ipsis *ko*, *kt*, *kp*, *ku*, *kq*, *kx*, *kr*, *ks*; singuli numeri, singulis æquales; & eorum dif-
def. 8. h. ferentiæ æquales, & similes: atque omnes ordinatim accepti, vt supra, vsque ad *k*, similiter arithmeticè sunt dispositi, atque omnes reliqui, vsque ad
45. h. *s*. Et sicut demonstratum est, quòd
3. h. *ef* (*ef*) + *fl* (*eg*): maior est, quàm *el* (*el*).
3. h. *lg* (*eg*) + *gm* (*eh*): maior, quàm *lm* (*em*).
3. h. *mh* (*eh*) + *hn* (*ei*): maior, quàm *mn* (*en*).

ni-

43. b. $ni(ei)+ik(ek)$: maior, quàm $nk(ek)$.
ita in præsenti demonstrabitur, eodem prorsus argumento, quòd

3. b. $ko(eo)+ot(ep)$: maior est, quàm $kt(et)$.

3. b. $tp(ep)+pu(eq)$: maior, quàm $tu(eu)$.

3. b. $uq(eq)+qx(er)$: maior, quàm $ux(ex)$.

43. b. $xr(er)+rs(es)$: maior, quàm $xs(es)$.

45. b. Item sicut demonstratum est, quòd

$ef(ef)$, $fl+lg(eg)$, $gm+mh(eh)$, $hn+ni(ei)$, $ik(ek)$, sunt termini componentes primum prologarithmum seriei C: & quòd $el(el)$, $lm(em)$, $mn(en)$, $nK(eK)$, sunt componentes primum seriei A. ita demonstrabitur in præsenti, quòd

$Ko(eo)$, $ot+tp(ep)$, $pu+uq(eq)$, $qx+xr(er)$, $rs-(es)$, sunt termini componentes prologarithmum secundum seriei C: & quòd $Kt(et)$, $tu(eu)$, $ux(ex)$, $xs(es)$, sunt componentes secundum prologarithmum seriei A.

45. b. Et omninò sicut ostensum est, quòd primus seriei C, est perspectè maior, primo seriei A: ita
def.8.h. demonstrabitur, quòd secundus seriei C, est perspectè maior secundo seriei A. Quod &c.

Similiter ostendetur, quòd & tertius tertio, & quartus quarto, sunt perspectè maiores: & quòd quisque prologarithmus seriei C, perspectè maior est, æqueordinato prologarithmo seriei A.

Quare &c.

Theor. 49. Prop. 49.

SI fuerint ſeries prologarithmorum, ex binis à ſecundo, ex ternis à tertio, ex quaternis à quarto, & ſic deinceps: ſecundus prologarithmus eius, quę ex pluribus, perſpectè minor eſt, quàm ſecundus eius, quæ ex paucioribus vno: & tertius, perſpectè minor, quàm tertius: & quartus, quàm quartus: & ſic deinceps vnuſquiſque perſpectè eſt minor, quàm ſuus æquecordinatus prologarithmus.

Hypoth.

Sint duæ ſeries prologarithmorum: altera *A*, ex terminis ab 1(*b*), & ex totenis, quotus eſt *b*: altera *C*, ex terminis ab 1(*d*), & ex totenis, quotus eſt *d*. & eſto *b*, vnitate minor, quàm *d*.

Conſtat, quòd 1(*b*) totus eſt ordine, quotus *b*: & 1(*d*), totus ordine, quotus *d*. *prop.* 27. *h.*

Dico ſecundum prologarithmum ſeriei *C*, perſpectè minorem eſſe, ſecundo ſeriei *A*.

Præpar.

e---20---*f*.... *m* .... *n* .... *o* .... *l* .... *q* .... *s* .... *u* .... *y*
g *h* *i* *K* *p* *r* *t* *x*

Sumatur productus *bd*, qui ſit *ef*: eique adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, *Kl*: eidemque *ef*, tot *d* adijciantur, quotus eſt *b*, qui ſint *fm*, *mn*, *no*, *ol*, & iterum ipſi *el*, adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *lp*, *pr*, *rt*, *tx*, *xy*: necnon iterum eidem *el*, adijciantur tot

d,

d, quotus est *b*, qui sint *lq, qs, su, uy.*

Demonstr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, est æqualis producto *d* per *b*: summa numerorum *fg, gh, hi, iK, Kl,* summæ *fm, mn, no, ol,* est æqualis: & summa *lp, pr, rt, tx, xy,* summæ *lq, qs, su, uy,* æqualis. Sunt autem & singulæ partes *fl,* singulis *ly* partibus æquales; & omnes, omnibus: & *fg, fm, fh, fn, fi, fo, fK,* ipsis *lp, lq, lr, ls, lt, lu, lx,* singuli numeri, singulis æquales: & eorum differentiæ æquales, & similes: additisque vtrimq; communibus numeris *ef, el,* etiam composito-
def.8.b. rum differentiæ sunt æquales & similes: & *ef, eg, em, eh, en, ei, eo, eK,* sunt similiter arithmeticè dispositi, atque *el, ep, eq, er, es, et, eu, ex.*
47. b. Est autem *ef,* non minor, quàm secunda potestas *fg,* & est *el,* maior, quàm *ef;* & *lp* æqualis ipsi *fg:* ergo *el* non minor est, quàm secunda potestas *lp:* ideoque similiter etiam *ep,* non minor, quàm secunda potestas *pr:* & *er,* non minor, quàm secunda potestas *rt:* & *et,* non minor, quàm secun-
47. b. da potestas *tx.* Itaque sicut demonstratum est, quod

46. b. *fg (ef)+gm (eg)*: minor est, quàm *fm (ef)*.
2. b. *mh (eg)+hn (eh)*: minor, quàm *mn (eh)*.
2. b. *ni (eh)+io (ei)*: minor, quàm *no (en)*.
2. b. *oK (ei)+Kl (eK)*: minor, quàm *ol (eo)*.

Sic

e---20---f ..... m ..... n ..... o ..... l ..... q ..... s ..... u ..... y
g h i K p r t x

Sic demonstrabitur, quòd
46. h. $lp(el)+pq(ep)$ minor est, quàm $lq(el)$.
2. h. $qr(ep)+rs(er)$ minor, quàm $qs(eq)$.
2. h. $st(er)+tu(et)$ minor, quàm $su(es)$.
2. h. $ux(et)+xy(ex)$ minor, quàm $uy(eu)$.
47. h. Item sicut demonstratum est, quòd
$fg(ef)$, $gm+mh(eg)$, $hn+ni(eh)$, $io+ok(ei)$, $Kl(ek)$.
componunt primum prologarithmum seriei C: & quòd
$fm(ef)$, $mn(em)$, $no(en)$, $ol(eo)$, componunt primum seriei A. sic
$lp(el)$, $pq+qr(ep)$, $rs+st(er)$, $tu+ux(et)$, $xy(ex)$, componunt secũdum prologarithmum seriei C: &
$lq(el)$, $qs(eq)$, $su(es)$, $uy(eu)$, componunt se-
47. h. cundum seriei A. Et omninò sicut primus seriei
def. 8. h. C, perspectè est minor primo seriei A: ita secundus prologarithmus, est perspectè minor secundo. Quod &c.

Similiter ostendetur, quod & tertius tertio, & quartus quarto, sunt perspectè minores: & quod quisque prologarithmus seriei C; pespectè minor est, æqueordinato prologarithmo seriei A.

Quare &c.

Theor. 50. Prop. 50.

Hyperlogarithmi rationum duplę, & superparticularium, quò sunt, minores inter terminos, eò sunt minores.

Præpar.

Esto *A*, series harmonica naturalis: & ordinentur *B*, *C*, *D*, series prologarithmorum; *B* quidem, ex binis à secundo; *C*, ex ternis à tertio; *D*, ex quaternis à quarto; & sic deinceps, à quotoquolibet, ex totenis.

Demonstr.

def. 12. h Nam in serie arithmetica naturali, ratio subdupla, est inter minimos terminos, primum, & secundum; deinde inter maiores, ordinatim multiplos minimorum; videlicet inter secundum, & quartum; inter tertium, & sextum; inter quartum, & octauum. Ergo reciprocè, in serie harmonica naturali, ratio dupla, est inter maximos terminos, primum, & secundum; deinde inter minores ordinatim submultiplos maximorum; videlicet inter secundum, & quartum; inter tertium, & sextum; inter quartum, & octauum. Ergo rationis duplę, inter maximos terminos primum, & secundum, hyperlogarithmus, est primus terminus seriei *A*, nempe vnitas. deinde inter minores terminos secundum, & quartum, hyperlogarithmus, est primus prologarithmus seriei *B*, ex duobus à secundo, nempe ex secundo, & tertio. & inter tertium,

[Margin notes: 21. 7. — 19. h. — 24. h. — def. 20. h — def. 22. h]

 & se-

& sextum, minores adhuc terminos, hyperlogarithmus, est primus prologarithmus seriei *C*, ex tribus à tertio, nempe ex tertio, quarto, & quinto. Et deinceps inter minores terminos quartum, & octauum, hyperlogarithmus, est primus prologarithmus seriei *D*, ex quatuor à quarto, nempe
47. b. ex quarto, quinto sexto, & septimo. Sed huiusmodi primorum prologarithmorum, minor est qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo hyperlogarithmorum duplæ rationis minor est, qui minores inter est terminos, quàm qui inter maiores. Quod &c.

Rursum in serie arithmetica naturali, ratio subsesquialtera, est inter minimos terminos, secun-
26. b.
12. 7. dum, & tertium; deinde inter maiores, ordinatim
19. b. multiplos minimorum; videlicet inter quartum, & sextum; inter sextum, & nonum; inter octauum,
24. b. & duodecimum. Ergo reciprocè in serie harmonica naturali, ratio sesquialtera est inter maximos terminos, secundum, & tertium; deinde inter minores, submultiplos maximorum, quartum, & sextum; & inter minores, sextum, & nonum; & ad-
def. 22 b huc inter minores, octauum, & duodecimum. Ergo rationis sesquialteræ inter maximos terminos, secundum, & tertium, hyperlogarithmus, est secundus seriei *A.* deinde inter minores, quartum, & sextum, hyperlogarithmus, est secundus prologa-

logarithmus seriei *B*, ex duobus à quarto, nempe ex quarto, & quinto. & inter sextum, & nonum, adhuc minores, hyperlogarithmus, est secundus seriei *C*, ex tribus à sexto, nempe ex sexto, septimo, & octauo. & inter octauum, & duodecimum, adhuc minores, hyperlogarithmus, est secundus seriei *D*, ex quatuor ab octauo, nempe ex octauo,
49. b. nono, decimo, & vndecimo. Sed in seriebus huiusmodi, secundorum prologarithmorum, minor est, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo sesquialteræ rationis hyperlogarithmorum minor est, qui minores inter terminos, quàm qui est inter maiores. Quod &c.

Similiter prorsus demonstratione ostendetur, de sesquitertia ratione, adhibitis tertijs prologarithmis earumdem serierum: & de sesqui quarta, adhibitis quartis prologarithmis: & de omni superparticulari ratione.

Quare &c.

Theor. 51. Propos. 51.

OMnis ratio multipla, vel est dupla, vel ex dupla & superparticularibus composita.

Demonstr.

Nam tripla 3 ad 1, ex sesquialtera, 3 ad 2, &
def.5.6. dupla, 2 ad 1, componitur: quadrupla, 4 ad 1, ex sesquitertia, 4 ad 3, sesquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1: quintupla, 5 ad 1, ex sesquiquarta, 5

ad 4, sesquitertia, 4 ad 3, sesquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1. Et sic de reliquis.

Quare &c.

Theor. 52. *Prop.* 52.

OMnis ratio numerosa, ex superparticularibus componitur.

Hypoth.

Esto ratio numerosa *a* ad *b*.

Dico *a* ad *b* rationem ex superparticularibus esse compositam.

Præpar.

Assumantur numeri 8, 5, eamdem inter se rationem habentes *a* ad *b*. & inter 8, & 5. medij numeri. 7. 6.

Demonstr.

def. 5. 6. Ratio 8 ad 5 ex rationibus 8 ad 7, 7 ad 6, 6 ad 5, componitur. Sed 8 ad 7, ratio numeri ad numerum vnitate minorem, est superparticularis, item 7 ad 6, 6 ad 5, sunt rationes superparticulares: ergo ratio numerosa, 8 ad 5, vel *a* ad *b*, ex rationibus superparticularibus componitur. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 53. *Prop.* 53.

QVotcunque terminorum, è serie harmonica naturali, ordine quantitatis acceptorum, hyperlogarithmus

rithmus rationis compositæ inter extremos, componitur ex hyperlogarithmus rationum componentium, inter extremos, & medios. & hypologarithmus ex hypologarithmis. *Hypoth.*

In serie harmonica naturali, sint tres termini *a*, *b*, *c*: & esto *a*, maior, quàm *b*; & *b*, maior, quàm *c*.

Dico rationis *a* ad *c*, inter terminos *a*, *c*, hyperlogarithmum, ex, rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b*, & rationis *b* ad *c*, inter *b*, *c*, hyperlogarithmis componi.

Et hypologarithmum, ex hypologarithmis.

Præpar.

Sumantur inter terminos *a*, *b*, omnes medij in serie harmonica naturali: necnon inter *b*, *c*. & sint inter *a*, *c* termini.

a g h i b K l m n c

Demonstr.

Hyperlogarithmus rationis *a* ad *b*, inter terminos *a*, *b*, est $a+g+h+i$. Hyperlogarithmus rationis *b* ad *c*, inter terminos *b*, *c*, est $b+K+l+m+n$. Hyperlogarithmus rationis *a* ad *c*, inter terminos *a*, *c*, est $a+g+h+i+b+K+l+m+n$. ex vtrarumque rationum *a* ad *b*; & *b* ad *c*, hyperlogarithmis, inter eosdem terminos compositus. Quod &c.

Item rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b*, hypologarithmus est, $g+h+i+b$: & rationis *b* ad *c*, inter *b*, *c*, est $K+l+m+n+c$: & rationis *a* ad *c*, est $g+h+i+b+K+l+m+n+c$. ex vtrisque compositus. Quod &c. Quare &c.

Theor. 54. *Prop.* 54.

CViusque numerosæ rationis hyperlogarithmi, quò sunt, minores inter terminos, eò sunt minores.

Hypoth.

Esto numerosa ratio inter seriei harmonicæ terminos ab vnitate, maiores 1(3*a*), 1(3*b*), & deinde inter minores 1(4*a*), 1(4*b*).

Dico inter 1(4*a*), 1(4*b*), minorem esse hyperlogarithmum, quàm inter 1(3*a*), 1(3*b*).

Præpar.

Assumantur minimi numeri in eadem ratione
21. 7. *a*, *b*: & deinceps maiores, nempe dupli, tripli,
27. *h*. quadrupli, donec inueniãtur denominatores propositorum terminorum, 3*a*, 3*b*, 4*a*, 4*b*. Deinde inter *a*, *b* ordinentur omnes medij, in serie arithmetica naturali, quorum deinceps supparticulares sunt rationes, *a*, *c*, *d*, *b*; & eorum æquemulti-
15. 5. pli 3*a*, 3*c*, 3*d*, 3*b*, easdem supparticulares habentes rationes deinceps; necnon & æquemultipli easdem habentes rationes 4*a*, 4*c*, 4*d*, 4*b*. Sumantur denique in serie harmonica termini, ab his denominati 1(3*a*), 1(3*c*), 1(3*d*), 1(3*b*): & 1(4*a*), 1(4*c*), 1(4*d*), 1(4*b*).

Demonstr.

24. *h*. Terminorum 1(4*a*), 1(4*c*), 1(4*d*), 1(4*b*) rationes deinceps, necnõ terminorum 1(3*a*), 1(3*c*), 1(3*d*), 1(3*b*), reciprocè sunt eædem, quæ termi-

norum

norum $4a$, $4c$, $4d$, $4b$, necnon $3a$, $3c$, $3d$, $3b$:
50. b. idest, eædem superparticulares. Quarum rationis inter $1(4a)$, $1(4c)$, minor est hyperlogarithmus, quàm inter $1(3a)$, $1(3c)$: & inter $1(4c)$, $1(4d)$, minor, quàm inter $1(3c)$, $1(3d)$: & inter $1(4d)$, $1(4b)$,
53. h. minor, quàm inter $1(3d)$, $1(3b)$. Et ex minoribus hyperlogarithmis, minor est hyperlogarithmus compositus, rationis compositæ inter extremos $1(4a)$, $1(4b)$, quàm ex maioribus, inter extremos $1(3a)$, $1(3b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 55. Prop. 55.

Hyperlogarithmi rationum duplæ, & superparticularium, quò sunt, minores inter terminos, eò sunt maiores.

Prepar.

Esto *A* series harmonica naturalis: & ordinentur *B*, *C*, *D*, series prologarithmorum ab vnitate; *B* quidem, ex binis; *C*, ex ternis; *D*, ex quaternis; & sic deinceps.

Demonst.

def. 12. b. Nam in serie arithmetica naturali, ratio subdupla est inter minimos terminos, primum, & secun-
21. 7. dum; deinde inter maiores, ordinatim multiplos
19. b. minimorum; videlicet inter secũdum, & quartum;
24. b. inter tertium, & sextum; inter quartum, & octauũ.
def. 20 b. Ergo reciprocè in serie harmonica naturali, ratio dupla

dupla est inter maximos terminos, primum, & secundum; deinde inter minores ordinatim submultiplos maximorum; videlicet, inter secundum, & quartum; inter tertium, & sextum; inter quartum,
def.23b & octauum. Ergo rationis duplæ, inter maximos terminos primũ, & secundum, hypologarithmus, est secundus terminus seriei *A*, nempe 1(2). deinde inter minores terminos secundum, & quartum, hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *B*, ex duobus à tertio, nempe ex tertio, & quarto: & inter tertium, & sextum, minores adhuc terminos hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *C*, ex tribus à quarto, nempe ex quarto, quinto, & sexto. & deinceps inter minores terminos, quartum, & octauum, hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *D*, ex quatuor à quinto, nempe ex quinto sexto,
48. h. septimo, & octauo. Sed huiusmodi secundorum prologarithmorum, maior est, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo hypologarithmorum duplę rationis maior est, qui minores inter est terminos, quàm qui inter maiores. Quod &c.

Rursum in serie arithmetica naturali, ratio sub-
26. h. sesquialtera, est inter minimos terminos, secun-
21. 7. dum, & tertium; deinde inter maiores, ordinatim
19. h. multiplos minimorum; videlicet, inter quartum,

& sex-

& ſextum; inter ſextum,& nonum; inter octauum,
24. b. & duodecimum. Ergo reciprocè in ſerie harmonica naturali, ratio ſeſquialtera eſt inter maximos terminos, ſecundum, & tertium; deinde inter minores, ſubmultiplos maximorum, quartum, & ſextum; & inter minores ſextum, & nonum; & adhuc inter minores octauum, & duodecimum.
def.23b Ergo rationis ſeſquialteræ inter maximos terminos, ſecundum, & tertium, hypologarithmus, eſt tertius ſeriei *A*. deinde inter minores, quartum,& ſextum, hypologarithmus, eſt tertius prologarithmus ſeriei *B*, ex duobus à quinto, nempe ex quinto, & ſexto. & inter ſextum,& nonum, adhuc minores terminos, hypologarithmus eſt tertius ſeriei *C*, ex tribus à ſeptimo, nempe ex ſeptimo, octauo,& nono. & inter octauum,& duodecimum adhuc minores, hypologarithmus, eſt terutis ſeriei *D*, ex quatuor à nono, nempe ex nono, decimo,
48. b. cimo, vndecimo, & duodecimo. Sed in ſeriebus huiuſmodi, tertiorum prologarithmorum, maior eſt, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo ſeſquialteræ rationis hypologarithmorum, maior eſt, qui minores inter terminos, quàm qui eſt inter maiores. Quod &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur; de ſeſquitertia ratione, adhibitis quartis prologarithmis earumdem ſerierum: & de ſeſquiquarta, adhibitis quintis prologa-

rithmis: & de omni ſuperparticulari ratione.

Quare &c.

Theor. 56. Propoſ. 56.

CViuſque numeroſæ rationis hypologarithmi, quò ſunt, minores inter terminos, eò ſunt maiores.

Hypoth.

Eſto numeroſa ratio inter ſeriei harmonicæ naturalis terminos ab vnitate, maiores $1(3a)$, $1(3b)$, & deinde inter minores $1(4a)$, $1(4b)$.

Dico inter $1(4a)$, $1(4b)$, maiorem eſſe hypologarithmum, quàm inter $1(3a)$, $1(3b)$.

Præpar.

Aſſumantur minimi numeri in eodem ratione a, b: & inter minimos, medij omnes c, d: quorum terminorum a, c, d, b, rationes deinceps ſunt ſupparticulares; aſſumantur & eorum multipli, do-
27. h. nec propoſitorum terminorum denominatores
15. 5. inueniantur, $3a$, $3c$, $3d$, $3b$, & $4a$, $4c$, $4d$, $4b$, eaſdem ſupparticulares habētes rationes deinceps. Sumantur denique in ſerie harmonica, termini ab his denominati $1(3a)$, $1(3c)$, $1(3d)$, $1(3b)$, &
24. h. $1(4a)$, $1(4c)$, $1(4d)$, $1(4b)$: quorum rationes deinceps, reciprocè ſunt eędem, & ſuperparticulares.

Demonſtr.

55. h. Inter $1(4a)$, $1(4c)$, maior eſt hypologarithmus, quàm inter $1(3a)$, $1(3c)$: & inter $1(4c)$,

$1(4d)$,

| $1(4d)$, maior, quàm inter $1(3c)$, $1(3d)$: & inter $1(4d)$, $1(4b)$, maior, quàm inter $1(3d)$, $1(3b)$.
53. b. | Et ex maioribus hypologarithmis, maior eſt hypologarithmus compoſitus, rationis compoſitæ, inter extremos $1(4a)$, $1(4b)$, quàm ex minoribus, inter extremos $1(3a)$, $1(3b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 57. *Prop.* 57.

EIuſdem rationis, inter eoſdem terminos, hyperlogarithmus hypologarithmo eſt maior.

Hypoth.

Sint in ſerie harmonica naturali ab vnitate, termini *a*, *b*: & eſto *a* prior, quàm *b*.

Dico rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b* terminos, hyperlogarithmum hypologarithmo maiorem eſſe.

Præpar.

Inter *a*, *b*, ſumantur medij omnes in ſerie harmonica, quorum ſumma *c*.

Demonſt.

hypoth. | *a*: prior, quàm *b*.
27. *b.* | *a*: maior, quàm *b*.
| $a+c$: maior, quàm $c+b$.
def. 22 *b* | $a+c$: hyperlogarithmus.
def. 23 *b* | $c+b$: hypologarithmus.
| Ergo rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b* terminos, hyperlogarithmus, eſt maior hypologarithmo.
| Quod &c. Quare &c.

Theor. 58. *Prop.* 58.

EIusdem rationis inter quoscunque terminos, hyperlogarithmus hypologarithmo est maior.

Hypoth. comm.

In serie harmonica naturali ab vnitate, sunto termini proportionales *a* ad *b*, vt *c* ad *d*.

Dico inter *a*, *b* hypologarithmum, hypologarithmo inter *c*, *d*, maiorem esse.

Hypoth. p. cas.

Esto *a*, maior, quàm *c*.

Demonstr.

14. 5. Quoniam *a*, maior est, quàm *c*; etiam *b*, ma-
54. *h*. ior est, quàm *d*: & inter *a*, *b*, maior est hyperlo-
58. *h*. garithmus, quàm inter *c*, *d*: sed inter *c*, *d*, hyperlogarithmus hypologarithmo est maior: ergo inter *a*, *b* hyperlogarithmus, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Quod &c.

Hypoth. 2. *cas.*

Esto *a*, minor, quàm *c*.

Demonstr.

14. 5. Quoniam *a*, minor est, quàm *c*; etiam *b* mi-
58. *h*. nor est, quàm *d*: & inter *a*, *b*, hyperlogarithmus
55. *h*. hypologarithmo est maior: hypologarithmus autem inter *a*, *b*, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Ergo inter *a*, *b* hyperlogarithmus, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 1. Prop. 59.

DAta ratione, terminos inuenire cuiuſpiam determinatæ rationis numeroſæ, in ſerie harmonica naturali ab vnitate, quos inter hypologarithmus ad vltimum, maior eſt, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & ſit determinata ratio numeroſa *c* ad *d*.

Oportet inuenire in ſerie harmonica naturali ab vnitate, terminos proportionales, vt *c* ad *d*: quos inter hypologarithmus ad vltimum eorum, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*.

Conſtr.

Rationis *c* ad *d*, minimi numeri inueniantur *c*, *d*: & eſto *c* minor, quàm *d*; cuius defectus *e*: & inueniatur *f* multiplex ipſius *e*, & maior ad vnitatem, quàm vt *a* ad *b*: & quotuplex eſt *f* ad *e*, totus numerus accipiatur *g*: per quem multiplicentur *c*, *d*, termini, & fiant *gc*, *gd* producti: quibus denominatæ ſumantur vnitates in ſerie harmonica naturali, 1(*gc*), 1(*gd*).

Dico inter 1(*gc*), 1(*gd*) hypologarithmum ad 1(*gd*), maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*.

Demonſtr.

9. b. Quoniam *c*, minor eſt, quàm *d*: & *gc*, minor
12. b. quàm *gd*: ergo reciprocè 1(*gc*) maior eſt, quàm
def.19.b 1(*gd*): & ſinguli medij harmonici inter 1(*gc*), 1-
p. 3. (*gd*), ſunt maiores, quàm 1(*gd*): & ſimul omnes

ad

ad $1(gd)$ maiores sunt, quàm vt eorum multitudo ad vnitatem. & componendo hypologari-
p. 3. thmus inter $1(gc)$, $1(gd)$, maior est ad $1(gd)$, quàm vt eius multitudo terminorum ad vnitatem.

44. b. Termini autem serici harmonicę ab vnitate inclusiuè, vsque ad $1(gd)$ inclusiuè, tot sunt, quotus est gd: & vsque ad $1(gc)$ inclusiuè, quotus est, gc: & ab $1(gc)$ exclusiuè, vsque ad $1(gd)$ inclusiuè,
30. b. tot, quotus est, gd---gc: Sed d---c, est e: & gd---gc, est ge: & g multiplicans e, facit f. Ergo termini ab $1(gc)$ exclusiuè, vsque ad $1(gd)$ inclu-
def. 23 b siuè, tot sunt, quotus est f. Sed termini ab $1(gc)$ exclusiuè, vsque ad $1(gd)$ inclusiuè, componunt hypologarithmum inter $1(gc)$, $1(gd)$: ergo multitudo terminorum hypologarithmi inter $1(gc)$,
constr. $1(gd)$, est f. Sed f ad vnitatem maior est, quàm vt a ad b. Ergo hypologarithmus inter $1(gc)$, $1(gd)$, ad $1(gd)$, maior est, quàm vt a ad b. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 2. Prop. 60.

DAta ratione, terminos inuenire cuiuspiam determinatæ rationis numerosæ, in serie harmonica naturali ab vnitate, quos inter hyperlogarithmus ad primum maior est, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & sit determinata ratio numerosa *c* ad *d*: & esto *c*, minor, quàm *d*.

Oportet inuenire, in serie harmonica naturali ab vnitate, terminos proportionales vt *c* ad *d*: quos inter hyperlogarithmus ad primum eorum, maior est, quàm vt *a* ad *b*.

Constr.

59. *h*. Fiat vt *d* ad *c*, ita *b* ad *e*: & inueniantur termini in serie harmonica naturali ab vnitate, proportionales *f* ad *g*, vt *d* ad *c*; inter quos hypologarithmus, maior sit ad *g*, quàm vt *a* ad *e*.

Dico inter *f*, *g* hyperlogarithmum, ad *f*, maiorem esse, quàm vt *a* ad *b*.

Demonstr.

constr. Inter *f*, *g* hypologarithmus, ad *g*, maior est,
constr. quàm vt *a* ad *e*: *g* ad *f*, est vt *e* ad *b*: ergo inter
4. 3. *f*, *g* hypologarithmus, ad *f*, maior est, quàm vt
57. *h*. *a* ad *b*. Sed inter *f*, *g* hyperlogarithmus hypo-
8. 5. logarithmo est maior; maioremque habet ad *f* ra-
13. 5. tionem: ergo inter *f*, *g* hyperlogarithmus, ad *f*, maior est, quàm vt *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 3. Prop. 61.

DAtis duabus numerosis, & non æquealtis rationibus, vtrisque maioris, vel vtrisque minoris inæquali-

qualitatis: inuenire in ſerie harmonica naturali, terminos duarum rationum, vt hypologarithmus altioris, maior ſit hyperlogarithmo depreſſioris.

Hypoth.

Sint duæ rationes numeroſæ, vtræque maioris, vel vtræque minoris inæqualitatis, *A* altior, *B* depreſſior.

Oportet in ſerie harmonica naturali, terminos inuenire vtrarumque, vt hypologarithmus *A*, ſit maior hyperlogarithmo *B*.

Conſtr.

35.7. Inueniantur *c*, *d*, minimi numeri numeroſæ
35. 7. rationis *A*: quorum *c*, minor, quàm *d*. Item inueniantur *e*, *f*, minimi numeroſæ rationis *B*:
def.28.h quorum *e*, minor, quàm *f*. Fiat ex *c*, *e* pro-

A			B	
c	d		e	f
ce		cf	g	de
cef	eg	cf2	fg	def
1(cef)	1(eg)		1(fg)	1(def)

9. h. ductus *ce*: & vt *c* ad *d*, ita *ce* ad *de*: & vt *e* ad *f*, ita *ce* ad *cf*. Et quoniam altior eſt *A*, quàm *B*; ideſt, *c* ad *d*, quàm *e* ad *f*; ideſt, *ce* ad *de*, quàm *ce* ad *cf*. & ſunt minoris inæqualitatis.
def.p.4. ergo *ce* minor eſt ad *de*, quàm ad *cf*. Ergo *cf*,
10. 5. minor eſt, quàm *de*. Sumatur inter *cf*, *de* medius quilibet numerus *g*. & multiplicentur om-
def.28.h nes *ce*, *cf*, *g*, *de*, communiter per *f*: & ſint

pro-

def.28b producti *cef*, *cf2*, *fg*, *def*. necnon multiplicetur
9. b. *g*, per *e*: & sit productus *eg*. Et quoniã *cef* ad *cf2*, est
11. 5. vt *e* ad *f*: item *eg* ad *fg*, est vt *e* ad *f*: ergo *cef* ad *cf2*,
constr. est vt *eg* ad *fg*. Est autem *cf*, minor, quàm *g*: er-
14. 5. go *cf2*, minor est, quàm *fg*: ergo *cef*, minor est,
quam *eg*: ergo sunt quatuor numeri, hoc ordine, *cef*, *eg*, *fg*, *def*, priores minores posterioribus; à
27. b. quibus denominatæ vnitates 1(*cef*), 1(*ge*), 1(*fg*),
1(*def*), sunt in serie harmonica naturali ab vnita-
24. b. te, hoc ordine, priores maiores posterioribus. &
24. & 9. b. est 1(*cef*) ad 1(*def*), vt *d* ad *c*; & 1(*eg*) ad 1(*fg*), vt *f* ad *e*.

Dico hypologarithmum inter terminos 1(*cef*), 1(*def*), maiorẽ esse hyperlogarithmo inter terminos 1(*eg*), 1(*fg*).

Demonstr.

def.23b Nam hypologarithmus inter terminos 1(*cef*),
1(*def*), ex 1(*eg*), ex 1(*fg*), & ex omnibus inter-
def.22b medijs, alijsque terminis componitur: hyperlogarithmus verò inter 1(*eg*), 1(*fg*), ex 1(*eg*), & ex intermedijs terminis, vsque ad 1(*fg*) exclusiuè, componitur. Ergo hyperlogarithmus inter 1(*cef*), 1(*def*), maior est hyperlogarithmo inter 1(*eg*), 1(*fg*). Quod &c. Quare &c.

Probl. 4. Prop. 62.

DAta qualibet ratione inæqualitatis, inuenire in serie harmonica naturali ab vnitate, terminos determi-

natam habentes rationem inter quos hyperlogarithmus ad hypologarithmum propior est æqualitati, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis a ad b: & sit determinata quædam ratio C.

Oportet inuenire terminos in serie harmonica naturali ab vnitate, habentes eamdem C rationem; inter quos hyperlogarithmus ad hypologarithmum est propior æqualitati, quàm vt a ad b.

Constr.

60. b. Esto a maior quàm b. & inueniantur in serie harmonica naturali ab vnitate, termini, prior d, posterior e; inter quos hyperlogarithmus ad priorem d, maior est, quàm vt a ad $a - b$.

Dico inter d, e hyperlogarithmum ad hypologarithmum, maiorem esse, quàm vt a ad b; maiorem, quàm vt b ad a.

Præpar.

Inter d, e, assumatur mediorum omnium harmonicorum summa f.

Demonstr.

deff. 22. & 23. b. constr. Inter d, e hyperlogarithmus est $d+f$; & hypologarithmus $f+e$: & est $d+f$ ad d, maior, quàm
3. 3. vt a ad $a - b$: & per conuersionem rationis, d
8. 5. $+f$ ad f, minor, quàm vt a ad b. Sed $d+f$ ad f
13. 5. $+e$, minor est, quàm vt $d+f$ ad f. Ergo $d+f$ ad $f+e$,

$f+e$, minor est, quàm vt a ad b. Ergo inter d, e hyperlogarithmus ad hypologarithmum, minor est, quàm vt a ad b. Quod &c.

58. h. Et est hyperlogarithmus hypologarithmo
8. 5. maior: b autem, minor, quàm a. Ergo hyperlogarithmus ad hypologarithmum maior est, quàm vt b ad a. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 59. Prop. 63.

SI fuerit prima ad secundam, minor, quàm vt tertia ad quartam; fuerit autem prima, quàm tertia, maior: erit & secunda, quàm quarta, maior.

Demonstr.

8. 5. Nam si esset secunda æqualis quartæ: esset prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quar-
8. 5. tam: contra hypothesim. Quòd si secunda esset
8. 5. minor, quàm quarta: esset prima ad secundam, maior, quàm vt ad quartam: prima autem ad quar-
13. 5. tam, maior est quàm vt tertia ad quartam: esset ergo prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam, contra hypothesim. Est ergo secunda, quàm quarta maior. Quod &c. Quare &c.

Theor. 60. Prop. 64.

SI fuerit prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam; fuerit autem prima, quàm tertia minor:

 erit

erit & secunda, quàm quarta, minor.

Demonstr.

8. 5. Nam si esset secunda æqualis quartæ: esset prima ad secundam minor, quàm vt tertia ad quartam. contra hypothesim. Quòd si secunda esset
8. 5. maior, quàm quarta: esset prima ad secundam,
8. 5. minor, quàm vt ad quartam: prima autē ad quar-
13. 5. tam, minor est, quàm vt tertia ad quartam: esset ergo prima ad secundam, minor, quàm vt tertia ad quartam. contra hypothesim. Est ergo secunda, quàm quarta; minor.

Quare &c.

Theor. 61. Prop. 65.

EArumdem numerosarum rationum vna tantùm quantitas est logarithmus.

Hypoth.

Sunto duæ quantitates inæquales *a*, *b*: & esto *a*, logarithmus rationis *C*.

Dico *b* non esse logarithmum rationis *C*.

Præpar.

Sumātur eiusdem rationis *C*, hyperlogarithmus
62. *h.* *d*, & hypologarithmus *e*, propiores æqualitati, quàm vt *a* ad *b*.

Demonstr.

57. *h.* *d*: maior quàm *e*.
Si *a*, maior est, quàm *b*.

d; *e*:

constr. | *d*; *e*: minor, quàm *a*; *b*.
def.24h | *d*: maior, quàm *a*.
63. h. | *e*: maior, quàm *b*.
def.24h | *b*, non est logarithmus rationis *C*. Quod &c.
| Si *a*, minor est; quàm *b*.
constr. | *e*; *d*: maior, quàm *a*; *b*.
def.24h | *e*: minor, quàm *a*.
64. h. | *d*: minor, quàm *b*.
def.24h | *b*, non est logarithmus rationis *C*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 62. Prop. 66.

Determinatæ numerosæ rationis hypologarithmi ad vltimum terminum, & hyperlogarithmi ad primum, sunt rationes quasi infinitæ.

Demonstr.

59. h. Possunt enim inueniri cuiusque determinatę rationis numerosæ termini in serie harmonica naturali ab vnitate, quorum ad vltimum, hypologarithmus maior est, quàm in data quacunque ratione: item, quorum ad primum, hyperlogarithmus maior est, quàm in data quacunque ratione. Quare hypologarithmi ad vltimum terminum, & hyperlogarithmi ad primum, ratio quasi est infinita.
60. h.
def.p. 3.

Theor.

Theor. 63. Propos. 67.

SI trium inæqualium quantitatum, maxima, & minima, fuerint propiores æqualitati, quàm data ratio inæqualitatis: etiam maxima, & media; media, & minima, erunt propiores æqualitati, quàm data eadem ratio.

Hypoth.

Sint inæquales buantitates a, b, c; maxima quidem a, minima c: & sit data ratio inæqualitatis d ad e; cuius maior terminus d, minor e: & sit a ad c, propior æqualitati, quàm d ad e.

Dico a; b, & b; c: propiores æqualitati, quàm d; e:

Demonstr.

hypoth.	a; c: propior æqualitati, quàm d; e.
def.3.3.	a; c: minor, quàm d; e. & c; a: maior, quàm e; d.
8. 5.	a; b: minor, quàm a; c. & b; a: maior, quàm c; a.
13. 5.	a; b: minor, quàm d; e. & b; a: maior, quàm e; d.
def.3.3.	a; b: propior æqualitati, quàm d; e. Quod &c.
8. 5.	b; c: minor, quàm a; c. & c; b: maior, quàm c; a.
13. 5.	b; c: minor, quàm d; e. & c; b: maior, quàm e; d.
def.3.3.	b; c: propior æqualitati, quàm d; e. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 5. Prop. 68.

DAta qualibet ratione inæqualitatis, inuenire cuiusdam determinatæ rationis hyperlogarithmos, & hypologarithmos ad inuicem, & ad logarithmum propiores æqualitati, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*; cuius maior terminus *a*, minor *b*: & ſit determinata quædam ratio *C*.

Oportet inuenire hyperlogarithmos, & hypologarithmos ad inuicem, & ad logarithmum rationis *C*, propiores æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*.

Conſtr.

62. *h.* | Inueniantur in ſerie harmonica naturali ab vnitate duo termini *d*, *e*, habentes eamdem rationem *C*; inter quos hyperlogarithmus *f*, ad hypologarithmum *g*, ſit propior æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*. Sumanturque minores termini quàm *d*, *e*, eamdem habentes rationem *C*; inter quos eſto hyperlogarithmus *h*; & eſto hypologarithmus *i*: & eiuſdem rationis *C*, eſto logarithmus *k*.

Dico *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, propiores eſſe æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*.

Demonſtr.

54. *h.* | *f*: maior eſt, quàm *h*.
def. 24 *h* | *h*: maior, quàm *k*.
def. 24 *h* | *k*: maior, quàm *i*.
56. *h.* | *i*: maior, quàm *g*.
conſtr. | *f*; *g*: propior æqualitati, quàm *a*; *b*.
67. *h.* | *f*, *h*, *k*, *i*, *g*, propiores æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 64. Prop. 69.

Eiusdem rationis hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus, quasi sunt æquales.

Demonstr.

68. h. Possunt enim inueniri eiusdem rationis hyperlogarithmi, & hypologarithmi, & ad inuicem, & ad logarithmum propiores æqualitati, quàm in
def. 3. 3. data qualibet ratione inæqualitatis. Quare eiusdem rationis hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus, quasi sunt æquales.

Theor. 65. Prop. 70.

Æquealtarum numerosarum rationum, ęquales sunt logarithmi.

Demonstr.

65. h. Earumdem enim numerosarum rationum, vna tantùm quantitas, est logarithmus. Sed æquealtæ, sunt eædem inter se. nam si non essent ęędem, cum vel vtraque sit maioris, vel vtraque minoris inęqualitatis; vtrarumque maioris, quę minor esset, vel vtrarumque minoris inæqualitatis, quæ maior esset, propior esset æqualitati: & non essent inter se æquealtæ; contra hypothesim. Ergo etiam æquealtarum rationum, vna tantùm quantitas est logarithmus.

Quare &c.

Theor. 66. Prop. 71.

NVmerosarum rationum, altioris, maior est logarithmus, & depressioris, minor.

Hypoth.

Sunto numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: & esto ipsius *A*, logarithmus *a*; & ipsius *B*, logarithmus *b*.

Dico *a*, maiorem esse, quàm *b*.

Præpar.

61. *b.* | Inueniatur *c*, hypologarithmus rationis *A*; & *d*, hyperlogarithmus rationis *B*; vt sit *c*, maior, quàm *d*.

Demonstr.

def. 24 b | *a*: maior, quàm *c*.

constr. | *c*: maior, quàm *d*.

def. 24 b | *d*: maior, quàm *b*.

| *a* maior, quàm *b*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 67. Prop. 72.

MVltiplicatarum numerosarum rationum hyperlogarithmi sunt quasi æquemultiplices: item hypologarithmi, quasi æquemultiplices.

Hypoth.

Sunto rationes numerosæ *A*, *B*: & esto *A*, triplicata ipsius *B*.

Dico hyperlogarithmos *A*, hyperlogarithmorum *B*, quasi triplices esse. item hypologarithmos hypologarithmorum.

Demonstr.

53. *h.* Ex *B*, *B* rationibus deinceps, duplicatæ rationis hyperlogarithmus, eſt ex hyperlogarithmis vtrarumque *B*, *B* compoſitus. Et ex *B*, *B*, *B* rationibus deinceps, triplicatæ rationis *A*, hyperlogarithmus, eſt ex hyperlogarithmis trium *B*, *B*, *B* compoſitus. item hypologarithmus ex hypologarithmis. Sed rationum *B*, *B*, *B* deinceps, hyperlogarithmi, ſunt quaſi æquales: item hypologarithmi, quaſi æquales. Ergo componendo, rationis ex duabus *B*, *B*, duplicatæ hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum vnius *B*, quaſi eſt duplex: & iterum componendo, rationis *A*, ex tribus *B*, *B*, *B*, triplicatæ hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum vnius *B*, quaſi eſt triplex: item hypologarithmus ad hypologarithmum, quaſi eſt triplex. Quod &c.

69. *h.*

15. 3.

23. 3.

Quare &c.

Theor. 68. Prop. 73.

MVltiplicatarum numeroſarum rationum, ſunt æquemultiplices logarithmi.

Hypoth.

Sunto rationes *A*, *B*, numeroſæ: & eſto *A*, multiplicata ipſius *B*.

Dico logarithmum *A*, logarithmi *B*, totuplicem eſſe, quotuplicata eſt *A* ad *B*.

De-

Demonstr.

69. *h.* Hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus *A*, sunt quasi æquales: item hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus *B*, sunt qua-
72. *h.* si æquales. Sed hyperlogarithmi *A*, ad hyperlogarithmos *B*; & hypologarithmi, ad hypologarithmos, sunt quasi totuplices, quotuplicata est
31. 3. *A* ad *B*. Ergo hyperlogarithmi *A*, ad logari-
65. *h.* thmum *B*, sunt quasi totuplices. Sunt autem loga-
33. 3. rithmi *A*, & *B*, quantitates determinatæ. Ergo logarithmus *A*, ad logarithmum *B*, totuplex est, quotuplicata est *A* ad *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 69. Prop. 74.

Rationes numerosę logarithmicam inter se rationem habentes, logarithmicè sunt proportionales, vt earum logarithmi.

Hypoth.

Sunto numerosæ rationes *A*, *B*, logarithmicam inuicem rationem habentes; & esto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Dico *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut *a* ad *b*.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur multiplicata ratio 3*A*, & æquemultiplex quantitas 3*a*: item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata 4*B*, & æquemultiplex 4*b*.

Demonstr.

hypoth.	Rationis *A*, logarithmus est *a*.
73. *b.*	Rationis 3*A*, logarithmus est 3*a*.
hypoth.	Rationis *B*, logarithmus est *b*.
73. *b.*	Rationis 4*B*, logarithmus est 4*b*.
71. *b.*	Si 3*A*, est altior, quàm 4*B*; etiam 3*a*, est maior,
70. *b.*	quàm 4*b*: si depressior; minor: si æquealta;
	æqualis.
def 8.4.	*A* ad *B*, est logarithmicè, sicut *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 6. Prop. 75.

DAta ratione, numerosam depressior inuenire.

Hypoth.

Esto data ratio *a* ad *b*: cuius maior terminus *a*, minor *b*.

Oportet numerosam inuenire depressiorem, quàm *a* ad *b*.

Constr.

Esto *c*, excessus *a*--*b*: & multiplicetur *c*, donec fiat maior, quàm *b*: & sit multiplicationis numerus *d*: cui addita vnitas faciat *e*.

Dico *e* ad *d*, depressiorem esse, quàm *a* ad *b*.

Demonstr.

Quoniam *cd*, maior est quàm *b*: ergo *cd*+*c*, maior est, quàm *b*+*c*; idest, maior, quàm *a*: & *cd*+*c* ad *c*, maior est, quàm *a* ad *c*: ergo per conuersionem rationis *cd*

+*c*

$+c$ ad *cd*, minor est, quàm *a* ad *b*. Sed *cd*$+c$ ad *cd*, est vt d$+u$ ad *d*: & *e* est *d*$+u$: ergo *e* ad *d* minor est, quàm *a* ad *b*: & est *e* maior, quàm *d*: ergo *e* ad *d*, est depressior, quàm *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 7. Prop. 76.

DAtis duabus rationibus non æquealtis, logarithmicam rationem habentibus: inuenire numerosam rationem, depressiorem altiore datarum, & altiorem depressiore.

Hypoth.

a *g* *e* *h* *b*

c *f* *d*

l *i* *k*

Sunto rationes datæ maioris inæqualitatis, *a* ad *b* altior, & *c* ad *d* depressior.

Oportet rationem numerosam inuenire, depressiorem, quàm *a* ad *b*, & altiorem, quàm *c* ad *d*.

Constr.

Sumatur inter *a*, *b*, media proportionalis *e*: & inter *c*, *d*, media *f*. Et vt *f* ad *c*, ita fiat *e* ad *g*: & vt *f* ad *d*, ita *e* ad *h*: & erit ex æquali *g* ad *h*, vt *c* ad *d*: eritque *g*, maior, quàm *h*: & erunt *g*, *e*, *h*, tres continuè proportionales: eritque *g* maior, quàm *e*; & *e*, maior, quàm *h*.

Et quoniam sicut *a* ad *b*, duplicata est rationum *a* ad *e*, & *e* ad *b*; sic *g* ad *h*, duplicata est rationum *g* ad *e*, & *e* ad *h*:

a *g* *e* *h* *b*
c *f* *d*
l *i* *k*

18. 4. *e* ad *h*: permutando erit ſicut *a* ad *b*, altior, quàm *g* ad *h*; ſic *a* ad *e*, & *e* ad *b*, altior, quàm *g* ad *e*, & *e* ad *h*: ſuntque rationes maioris inæqualitatis: ergo *a* ad *e*, maior eſt, quàm *g* ad *e*: & *a*, maior, quàm *g*. item *e* ad *b*, maior eſt, quàm *e* ad *h*: & *h*, maior, quàm *b*.

Duarum quantitatum *h*---*b*, vel *b*, ſumatur vna non maior, quàm altera: quæ ſit *h*---*b*: cuius æqualiter diuiſæ ſecundum quemlibet numerum particula ſit *i*. & multiplicetur *i*, donec fiat primò maior, quàm *b*: & eſto multiplicationis numerus *k*. Deinde multiplicetur *i*, donec fiat primò maior, quàm *g*: & ſit multiplicationis numerus *l*.

Dico *l* ad *k*, depreſſiorem eſſe, quàm *a* ad *b*: altiorem, quàm *c* ad *d*.

Demonſtr.

Maior eſt *h*---*b*, quàm *i*: ſed *Ki*---*b* non maior: ergo *h*---*b*, maior eſt, quàm *Ki*---*b*: & *h*, maior, quàm *Ki*: & eſt *Ki* maior, quàm *b*. Deinde *a* ad *e*, eſt vt *e* ad *b*: & *e* ad *g*, eſt vt *h* ad *e*: ergo ex æquali in perturbata, *a* ad *g*, eſt vt *h* ad *b*. & permutando *a* ad *h*, vt *g* ad *b*: & *a*---*g* ad *h*---*b* vt *a* ad *g*: ſed *a* maior eſt, quàm *g*: ergo *a*---*g*, maior eſt, quàm *h*---*b*: ſed *h*---*b*, maior eſt, quàm *i*: ergo *a*---*g*, maior eſt, quàm *i*. ſed *li*---*g*, non maior eſt, quàm *i*. ergo *a*---*g*, maior eſt, quàm *li*---*g*: ergo *a* maior

ior est, quàm *li*. Ergo *li* ad *ki*, vel *l* ad *k* minor est, quàm *a* ad *b*: & sunt maioris inæqualitatis: ergo *l* ad *K* depressior est, quàm *a* ad *b*. Quod &c. Rursum *li* maior est, quàm *g*: & *h* maior est quàm *Ki*. Ergo *li* ad *Ki*, vel *l* ad *K*, maior est, quàm *g* ad *h*, vel quàm *c* ad *d*: & sunt maioris inæqualitatis rationes: ergo *l* ad *K*, altior est, quàm *c* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 8. Prop. 77.

DAta qualibet non numerosa ratione, dataque altera qualibet ratione inęqualitatis: duas numerosas rationes inuenire altiorem & depressiorem, quàm data non numerosa; logarithmicè proportionales, vt numerus ad numerum; propiores æqualitati logarithmicæ, quàm sit data altera ratio.

Hypoth.

Sit data quælibet ratio non numerosa; cuius maior terminus *a*, minor *b*: & sit data altera ratio inæqualitatis; cuius maior terminis *c*, minor *d*.

Oportet inuenire duas rationes numerosas, altiorem, quàm *a* ad *b*, & depressiorem, quàm *a* ad *b*; logarithmicè proportionales, vt numerus ad numerum: sed vt altior ad depressiorem logarithmicè sit minor, quàm vt *c* ad *d*.

Constr.

75. *b*. | Inueniatur ratio numerosa *e* ad *f*, depressior, quàm *c* ad *d*. sumaturque numerus *g*, pariter par, ma-

53. 3. maior quàm *e*: & quotus est *g*, subtotuplicata, rationis *a* ad *b*, ratio inueniatur *h* ad *i*: & inueniatur numerosa ratio *K* ad *l*, depressior, quàm *h* ad *i*: & rationis *K* ad *l*, sumantur duplicata, triplicata, & deinceps reliquæ multiplicatæ, donec fiat ratio *M*, primò altior, quàm *a* ad *b*: & sit multiplicationis numeris *m*: qui vnitate multatus, relinquatur *n*: & quotus est *n*, totuplicata, rationis *K* ad *l*, fiat ratio *N*.

Dico rationem *N* depressiorem esse, quàm *a* ad *b*: & *M* ad *N* logarithmicè minorem esse, quàm vt *c* ad *d*.

Demonstr.

Si enim ratio *N*, non esset depressior, quàm *a* ad *b*: esset vel æquealta, vel altior. Sed non est altior alioquin *M*, non esset primò altior, quàm *a* ad *b*. neque est æquealta, alioquin esset eadem, atque *a* ad *b*: & esset etiam *a* ad *b* ratio numerosa, contra hypothesim. Ergo ratio *N*, est depressior, quàm *a* ad *b*.

Deinde quoniam *K* ad *l*, est depressior, quàm *h* ad *i*: & *h* ad *i*, totuplicata quotus est *g*, est *a*
19. 4. ad *b*: ergo *K* ad *l*, totuplicata quotus est *g*, est depressior, quàm *a* ad *b*. sed *K* ad *l*, totuplicata
5. 3. & def. p. 4. quotus est *m*, est altior, quàm *a* ad *b*. Ergo numerus *m*, maior est, quàm *g*: sed *g*, est maior, quàm *e*: ergo *m*, multò est maior, quàm *e*: & est *m* ad vnitatem, maior, quàm *e* ad eamdem vnitatem: & per conuersionem rationis, *m* ad *n*, minor

constr. | nor eſt, quàm *e* ad *f*. Sed vt *m* ad *n*, ita logari-
17. 4. | thmicè eſt ratio *M* ad rationem *N*. ergo ratio *M* ad rationem *N*, minor eſt logarithmicè, quàm vt *e* ad *f*: & multò minor, quàm vt *c* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 70. *Prop.* 78.

NOn numeroſæ rationis vna tantùm quantitas eſt logarithmus.

Hypoth. p.

Eſto ratio *a* ad *b* non numeroſa: ſintque duæ quantitates inæquales, *c* maior, *d* minor: quarum vna *c*, eſto logarithmus rationis *a* ad *b*.

Dico *d*, non eſſe logarithmum rationis *a* ad *b*.

Præpar.

77. *b.* | Inueniantur duæ rationes numeroſæ, *E* altior, quàm *a* ad *b*, & *F* depreſſior: vt ſit *E* ad *F*, logarithmicè ſicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *c* ad *d*. & aſſignentur ipſarum *E*, *F* rationum, logarithmi *e*; *f*.

Demonſtr.

præpar. | *E*; *F*: logarithmicè minor, quàm *c*; *d*.
74. *b.* | *E*; *F*: *e*; *f*.
17. 4. | *e*; *f*: minor, quàm *c*; *d*.
def. 34 *b* | *e*: maior, quàm *c*.
63. *b.* | *f*: maior, quàm *d*.
def. 34 *b* | *d*, non eſt logarithmus rationis *a* ad *b*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Esto *d*, logarithmus rationis *a* ad *b*.

Dico *c*, non esse logarithmum rationis *a* ad *b*.

Demonstr.

sup. | *e*; *f*: minor, quàm *c*; *d*.
2.3. | *f*; *e*: maior, quàm *d*; *c*.
def.34b | *f*: minor, quàm *d*.
64.*b*. | *e*: minor, quàm *c*.
def.34b | *c*, non est logarithmus rationis *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 71. *Prop.* 79.

NOn numerosarum rationum, altioris maior est logarithmus, & depressioris minor.

Hypoth.

Sunto non numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: & esto ipsius *A*, logarithmus *a*; & ipsius *B*, logarithmus *b*.

Dico *a*, maiorem esse, quàm *b*.

Præpar.

76.*b*. | Inter *A*, *B* rationes, inueniatur numerosa ratio *C*, depressior, quàm *A*, altior quàm *B*: cuius logarithmus esto *c*.

Demonstr.

def.34b | *a*: maior est, quàm *c*.
def.34b | *c*: maior, quàm *b*.
| *a*: maior, quàm *b*. Quod &c. Quare &c.

Theo-

Theor. 72. Prop. 80.

MVltiplicatarum rationum, sunt æquemultiplices logarithmi.

Hypoth.

Esto ratio *A* rationis *B* triplicata: & esto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Dico *a* ad *b* triplicem esse.

Hypothesis contradictoria in primo casu.

			c	*d*		
E	*A*	*F*		*G*	*B*	*H*
e	*a*	*f*		*g*	*b*	*h*

Esto si fieri potest *a* maior, quàm triplex ad *b*.

Præpar.

76. *b.* Inter rationem *a* ad *b* altiorem, & rationem triplicem depressiorem, ratio numerosa sumatur *c* ad
77. *b.* *d*, depressior, quàm *a* ad *b*, altior, quàm triplex, & vt *a*, sit maior, quàm *c*; & *d*, maior, quàm *b*. Et inueniantur duæ numerosæ rationes, *E* altior quàm *A*, & *F* depressior: vt sit *E* ad *F* logarithmicè sicut numerus ad numerū, & minor, quàm
77. *b.* vt *a* ad *c*. Item inueniantur duę numerosæ rationes, *G* altior quàm *B*, & *H* depressior; vt sit *G* ad *H* logarithmicè sicut numerus ad numerum, & minor quàm vt *d* ad *b*. Sint autem rationum *E*, *F*, *G*, *H*, logarithmi *e*, *f*, *g*, *h*.

		c	d			
E	*A*	*F*		*G*	*B*	*H*
e	*a*	*f*		*g*	*l*	*h*

Demonstr.

præpar.	*A*: altior, quàm *F*.
14. 4.	*A*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *B*.
præpar.	*G*: altior, quàm *B*.
14. 4.	*F*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *G*.
17. 4.	*A*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *G*.
hypoth.	*A*; *B*: triplicata.
17. 4.	*F*; *G*: depressior, quàm triplicata.
74. *h.*	*F*; *G*: logarithmicè *f*; *g*.
17. 4.	*f*; *g*: minor, quàm triplex.
præpar.	*E*; *F*: logarithmicè minor, quàm *a*; *c*.
74. *h.*	*E*; *F*: logarithmicè *e*; *f*.
17. 4.	*e*; *f*: minor, quàm *a*; *c*.
def. 34*h*	*e*: maior, quàm *a*.
63. *h.*	*f*: maior, quàm *c*.
præpar.	*G*; *H*: logarithmicè minor, quàm *d*; *b*.
74. *h.*	*g*; *h*: logarithmicè *G*; *H*.
17. 4.	*g*; *h*: minor, quàm *d*; *b*.
2. 3.	*h*; *g*: maior, quàm *b*; *d*.
def. 32*h*	*h*: minor, quàm *b*.
64. *h.*	*g*: minor, quàm *d*.
67. *h.*	*f*; *g*: maior, quàm *c*; *d*.
præpar.	*c*; *d*: maior, quàm triplex.

f; *g*:

13. 5. sup. | *f*; *g*: maior, quàm triplex. } quæ sunt contradi-
| *f*; *g*: minor, quàm triplex. } ctoria.

Ergo *a* ad *b*, non est maior, quàm triplex.

Hypoth. contrad. in secundo casu.

c *d*

E *A* *F* *G* *B* *H*

e *a* *f* *g* *b* *h*

Esto si fieri potest *a* minor, quàm triplex ad *b*.

Præpar.

76. *b.* | Inter rationem *a* ad *b* depressiorem, & rationem triplicem altiorem ratio numerosa sumatur *c* ad *d*, depressior, quàm triplex; altior, quàm *a* ad *b*: & vt *c* sit maior quàm *a*: & *b* maior, quàm *d*.

77. *b.* | Et inueniantur duæ numerosæ rationes, *E* altior quàm *A*, & *F* depressior; vt sit *E* ad *F* logarithmicè, sicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *c* ad *a*.

77. *b.* | Item inueniantur duæ numerosæ rationes; *G* altior, quàm *B*; & *H*, depressior; vt sit *G* ad *H*, logarithmicè sicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *b* ad *d*. Sint autem rationum *E*, *F*, *G*, *H*, logarithmi *e*, *f*, *g*, *h*.

Demonstr.

præpar. | *E*: altior, quàm *A*.

14. 4. | *E*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *H*.

præpar. | *B*: altior, quàm *H*.

14. 4. | *A*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *B*.

17. 4. | *E*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *B*.

A; *B*:

c						*d*
	E	*A*	*F*	*G*	*B*	*H*
	e	*a*	*f*	*g*	*b*	*h*

hypoth.	*A*; *B*: triplicata.
17. 4.	*E*; *H*: maior, quàm triplicata.
74. *h.*	*e*; *h*: logarithmicè vt *E*; *H*.
17. 4.	*e*; *h*: maior, quàm triplex.
præpar.	*E*; *F*: minor, quàm *c*; *a*.
74. *h.*	*E*; *F*: logarithmicè vt *e*; *f*.
17. 4.	*e*; *f*: minor, quàm *c*; *a*.
2. 3.	*f*; *e*: maior, quàm *a*; *c*.
*def.*34*h*	*f*: minor, quàm *a*.
64. *h.*	*e*: minor, quàm *c*.
præpar.	*G*; *H*: logarithmicè minor, quàm *b*; *d*.
74. *h.*	*g*; *h*: logarithmicè; vt *G*; *H*.
17. 4.	*g*; *h*: minor, quàm *b*; *d*.
*def.*32*h*	*g*: maior, quàm *b*.
63. *h.*	*h*: maior, quàm *d*.
67. *h.*	*e*; *h*: minor, quàm *c*; *d*.
præpar.	*c*; *d*: minor, quàm triplex.
13. 5.	*e*; *h*: minor, quàm triplex. } quæ ſunt contradi-
ſup.	*e*; *h*: maior, quàm triplex. } ctoria.

Ergo *a* ad *b*, non eſt minor, quàm triplex.
Ergo *a* ad *b* eſt triplex. Quod &c.
Quare &c.

Theo-

Theor. 73. *Prop.* 81.

OMnifariam rationes, logarithmicam inter se rationem habentes, logarithmicè sunt proportionales, vt earum logarithmi. *Hypoth.*

Dico *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut *a* ad *b*.

Sunto rationes *A*, *B*, logarithmicam inuicem rationem habentes: & esto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur multiplicata ratio 3*A*, & æquemultiplex quantitas 3*a*: item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata 4*B*, & æquemultiplex 4*b*.

Demonstr.

hypoth.	Rationis *A*, logarithmus est *a*.
80. *b.*	Rationis 3*A*, logarithmus est 3*a*.
hypoth.	Rationis *B*, logarithmus est *b*.
80. *b.*	Rationis 4*B*, logarithmus est 4*b*.
def. 3.4. *b* / 79. *b.*	Si 3*A*, est altior, quàm 4*B*; etiam 3*a*, est maior, quàm 4*b*: si depressior; minor: si æquealta; æqualis.
def. 8.4.	*A* ad *B*, est logarithmicè, sicut *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 74. *Prop.* 82.

DVarum quarumlibet numerosarum rationum, hyperlogarithmus vnius ad hypologarithmum alterius, maior est, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

De-

Demonstr.

def.24b Est enim hyperlogarithmus vnius, eiusdem logarithmo maior: & est hypologarithmus alterius,
8. 5. minor eiusdem logarithmo. Ergo hyperlogarithmus ad logarithmum vnius, maior est, quàm vt
p. 3. hypologarithmus ad logarithmum alterius. Quare permutando, vnius hyperlogarithmus ad hypologarithmum alterius, maior est, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Probl. 9. Prop. 83.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis altioris: inuenire terminos depressioris, inter quos ad hyperlogarithmum, maior sit hyperlogarithmus altioris, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: sintque rationis *A*, dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *B* terminos inuenire, inter quos ad hyperlogarithmum, maior est hyperlogarithmus inter *c*, *d*; quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Constr.

Sumatur inter *c*, *d*, hyperlogarithmus *e*: & inter alios quoslibet eiusdem rationis *A* terminos
54. b. minores, quàm *c*, *d*, sumatur alius minor hyper-
62. b. logarithmus *f*: & inueniantur termini *g*, *h*, in ra-

tione

tione *B*, inter quos hyperlogarithmus *i*, ad hypologarithmum *K*, propior sit æqualitati, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *e* ad *i* maiorem esse, quàm vt logarithmus rationis *A*, ad logarithmum rationis *B*.

Præpar.

Esto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonstr.

def.24b	*f*: maior est, quàm *a*.
8. 5.	*e*; *a*: maior, quàm *e*; *f*.
constr.	*e*; *f*: maior, quàm *i*; *k*.
def 24b.	*b*: maior, quàm *k*.
8. 5.	*i*; *k*: maior, quàm *i*; *b*.
13. 5.	*e*; *a*: maior, quàm *i*; *b*.
p. 3.	*e*; *i*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 10. *Prop.* 84.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis depressioris: inuenire terminos altioris, inter quos hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum depressioris, minor sit, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: sintque rationis *B* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *A* terminos inuenire, inter quos hy-

perlogarithmus, ad hyperlogarithmum inter *c*, *d* minor est, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Constr.

Sumatur inter *c*, *d*, hyperlogarithmus *e*: & inter alios quoslibet minores terminos, quàm *c*, *d*,
54. *b*. sumatur eiusdem rationis *B* alius minor hyper-
62. *b*. logarithmus *f*: rationis autem *A*, inueniantur termini, *g*, *h*, inter quos hyperlogarithmus *i*, ad hypologarithmum *k*, minor sit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *i* ad *e*, minorem esse, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Præpar.

Esto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonstr.

def. 24*b*	*a*: maior est, quàm *K*.
8. 5.	*i*; *a*: minor, quàm *i*; *K*.
constr.	*i*; *K*: minor, quàm *e*; *f*.
def. 24*b*	*b*: minor, quàm *f*.
8. 5.	*e*; *f*: minor, quàm *e*; *b*.
13. 5.	*i*; *a*: minor, quàm *e*; *b*.
p. 3.	*i*; *e*: minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 11. *Prop.* 85.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis altioris: inuenire terminos

nos depreſſioris, inter quos ad hypologarithmum minor ſit hypologarithmus altioris, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ rationes numeroſæ, *A* altior, *B* depreſſior: ſintque rationis *A* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *B* terminos inuenire, inter quos ad hypologarithmum minor ſit hypologarithmus inter *c*, *d*, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Conſtr.

Sumatur inter *c*, *d*, hypologarithmus *e*: & inter alios terminos eiuſdem rationis *A*, minores
56. *h*. quàm *c*, *d*, ſumatur alius maior hypologarithmus
61. *h*. *f*: & inueniantur in ratione *B*, termini *g*, *h*; inter quos hypologarithmus *i* ad hyperlogarithmum *k* maior ſit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *e* ad *i*, minorem eſſe, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Præpar.

Eſto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonſtr.

conſtr.	*e*; *f*: minor, quàm *i*; *K*.
p. 3.	*e*; *i*: minor, quàm *f*; *K*.
def. 24*h*	*K*: maior, quàm *b*.
8. 5.	*f*; *K*: minor, quàm *f*; *b*.
def. 24*h*	*a*: maior, quàm *f*.

8.5. | f; b: minor, quàm a; b.
13.5. | e; i: minor, quàm a; b. Quod &c.
Quare &c.

Probl. 12. *Prop.* 86.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis depressioris: inuenire terminos altioris, inter quos hypologarithmus ad hypologarithmum depressioris, maior sit, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æqualtæ numerosæ rationes, A altior, B depressior: sintque rationis B dati termini c, d.

Oportet rationis A terminos inuenire, inter quos hypologarithmus ad hypologarithmum inter c, d, maior est, quàm vt logarithmus A ad logarithmum B.

Constr.

Sumatur inter c, d, hyploogarithmus e: & inter alios minores terminos, eiusdem rationis B,
56. h. sumatur alius maior hypologarithmus f: & ratio-
62. h. nis A, inueniantur termini g, h, quos inter hypologarithmus i ad hyperlogarithmum K maior sit, quàm vt e ad f.

Dico i ad e, maiorem esse, quàm vt logarithmus A ad logarithmum B.

Præpar.

Esto rationis A, logarithmus a; & rationis B logarithmus b.

De-

Demonstr.

constr.	*i*; *K*: maior est, quàm *e*; *f*.
p. 3.	*i*; *e*: maior, quàm *K*; *f*.
def.24h	*b*: maior, quàm *f*.
8. 5.	*K*; *f*: maior, quàm *K*; *b*.
def.24h	*K*: maior, quàm *a*.
8. 5.	*K*; *b*: maior, quàm *a*; *b*.
13. 5.	*i*; *e*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 75. Prop. 87.

ARithmeticè dispositorum terminorum ratio, quàm habent bini minores ad inuicem, altior est ratione, quàm habent bini maiores.

Hypoth.

	Sint arithmeticè dispositę quantitates *a*, *b*, *c*, *d*:
4. *h.*	& sit *a* minor, quàm *c*. vnde quoniam permutando *a*, *c*, *b*, *d*, sunt arithmeticè dispositæ, etiam
def.5.h.	*b* est minor, quàm *d*.

Dico rationes terminorum *a*, *b* ad inuicem, altiores esse rationibus *c*, *d* ad inuicem.

Præpar.

Quoniam *a*, *b* sunt inæquales; esto *a* minor, quàm *b*: & sit defectus *e*.

Demonstr.

sup.	*b*: minor, quàm *d*.
8. 5.	*b*; *e*: minor, quàm *d*; *e*.

3. 3. | *b*; *a*: maior, quàm *d*; *c*.
hypoth. | *b*: maior, quàm *a*. & *d*: maior, quàm *c*.
*def.p.*4. | *b*; *a*: altior, quàm *d*; *c*. Quod &c.
2. 3. | *a*; *b*: minor, quàm *c*; *d*.
hypoth. | *a*: minor, quàm *b*. & *c*: minor, quàm *d*.
*def.p.*4. | *a*; *b*: altior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 76. Prop. 88.

Harmonicè diſpoſitum terminorum ratio, quàm habent bini maiores ad inuicem, altior eſt ratione, quàm habent bini minores.

Hypoth.

Sint harmonicè diſpoſitæ quantitates *a*, *b*, *c*, *d*:
34. *b.* | & ſit *a* maior, quàm *c*. vnde quoniam permutando
*def.*13*b* | *a*, *c*, *b*, *d*, ſunt harmonicè diſpoſitæ, etiam *b*, eſt maior, quàm *d*.

Dico rationes terminorum *a*, *b* ad inuicem, altiores eſſe rationibus *c*, *d* ad inuicem.

Præpar.

Sumatur vna quælibet quantitas *e*: & fiat

a; *e*: *e*; *f*.
b; *e*: *e*; *g*.
c; *e*: *e*; *h*.
d; *e*: *e*; *i*.

De-

Demonstr.

33. *h.*	*f, g, g, i* sunt arithmeticè ordinatæ.
constr.	*c; e: e; h. e; a: f; e.*
p. p.	*c; a: f; h.*
	c: minor, quàm *a.* & *f*: minor, quàm *h.*
def 5. *h.*	*g*: minor, quàm *i.*
87. *h.*	*f; g*: altior, quàm *h; i.* & *g; f:* altior, quàm *i; h.*
sup.	*f; g: b; a.* & *g; f: a; b.*
sup.	*h; i: d; c.* & *i; h: c; d.*
	b; a: altior, quàm *d; c.* & *a; b*: altior, quàm *c; d.* Quod &c. Quare &c.

Theor. 77. *Prop.* 89.

SI fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; sitque maior proportio primæ priorum, ad primam posteriorum, quàm secundę, ad secundam; & hæc maior, quàm tertiæ, ad tertiam: & sic deinceps: habebunt omnes priores simul, ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima: & multò maiorem, quàm omnes priores, relictis duabus primis, ad omnes posteriores, relictis duabus primis: & sic deinceps etiam maiorem, quàm vltima, ad vltimam: sed minorem, quàm omnes priores, relicta vltima, ad omnes posteriores, relicta etiam vltima: & multò minorem, quàm omnes priores, relictis duabus vltimis, ad omnes posteriores, relictis pariter duabus vltimis: & sic deinceps etiam minorem, quàm prima, ad primam. Hy-

Hypoth.

a e
b f
c g
d h

$a; e$: maior, quàm $b; f$.
$b; f$: maior, quàm $c; g$.
$c; g$: maior, quàm $d; h$.

Dico $a+b+c+d; e+f+g+h$: maiorem esse, quàm $b+c+d; f+g+h$.

Et $b+c+d; f+g+h$: maiorem, quàm $c+d; g+h$.

Et $c+d; g+h$: maiorem, quàm $d; h$.

Dico etiam $a+b+c+d; e+f+g+h$: minorem esse, quàm $a+b+c; e+f+g$.

Et $a+b+c; e+f+g$: minorem, quàm $a+b, e+f$.

Et $a+b; e+f$: minorem, quàm $a; e$.

Demonstr.

hypoth. | $c; g$: maior, quàm $d; h$.
p. 3. | $c; d$: maior, quàm $g; h$.
p. 3. | $c+d; d$: maior, quàm $g+h; h$.
p. 3. | $c+d$: $g+h$: maior, quàm $d; h$. Quod &c.
3. 3. | $c+d; c$: minor, quàm $g+h; g$.
2. 3. | $c; c+d$: maior, quàm $g; g+h$.
p. 3. | $c; g$: maior, quàm $c+d; g+h$.
hypoth. | $b; f$: maior, quàm $c; g$.
13. 5. | $b; f$: maior, quàm $c+d; g+h$.
p. 3. | $b; c+d$: maior, quàm $f; g+h$.

$b+c$

p. 3. | $b+c+d$; $c+d$: maior, quàm $f+g+h$; $g+h$.
p. 3. | $b+c+d$; $f+g+h$: maior, quàm $c+d$; $g+h$. Quod &c.
sup. | $a+b+c+d$; $e+f+g+h$: maior, quàm $b+c+d$; $f+g+h$. Quod &c.
hypoth. | a; e: maior, quàm b; f.
p. 3. | a; b: maior, quàm e; f.
p. 3. | $a+b$; b: maior, quàm $e+f$; f.
3. 3. | $a+b$; a: minor, quàm $e+f$; e.
p. 3. | $a+b$; $e+f$: minor, quàm a; e. Quod &c.
sup. | $a+b$; b: maior, quàm $e+f$; f.
p. 3. | $a+b$; $e+f$: maior, quàm b; f.
hypoth. | b; f: maior, quàm c; g.
13. 5. | $a+b$; $e+f$: maior, quàm c; g.
p. 3. | $a+b$; c: maior, quàm $e+f$; g.
p. 3. | $a+b+c$; c: maior, quàm $e+f+g$; g.
3. 3. | $a+b+c$; $a+b$: minor, quàm $e+f+g$; $e+f$.
p. 3. | $a+b+c$; $e+f+g$: minor, quàm $a+b$; $e+f$. Quod &c.
sup. | $a+b+c+d$; $e+f+g+h$: minor, quàm $a+b+c$; $e+f+g$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 78. *Prop.* 90.

E Serie harmonica naturali ab vnitate, terminorum harmonicè diſpoſitorum, altioris rationis maior terminus, ad maiorem depreſſioris, maior eſt, quàm vt hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum: & hyperlogari-

thmus, ad hyperlogarithmum, maior, quàm vt hypologarithmus, ad hypologarithmum: & hypologarithmus, ad hypologarithmum maior, quàm vt minor terminus, ad minorem.

Hypoth.

Sint è serie harmonica naturali ab vnitate, termini harmonicè dispositi *a*, *b*, *c*, *d*, quorum altior sit ratio *a* ad *b*, quàm *c* ad *d*. Sitque *a*, maior, quàm *b*: ideoque & *c*, maior, quàm *d*. (def. 13 h)

Quoniam *a* ad *b*, altior est, quàm *c* ad *d*: oportet *a*, maiorem esse, quàm *c*; & *b*, quàm *d*. alioquin permutando, dispositorum harmonicè *a*, *c*, (34. h.) *b*, *d*, esset *c* maior, quàm *a*; ideoque & *d* maior, (def. 13. h) quàm *b*; & *c* ad *d*, altior ratio, quàm *a* ad *b*, (88. h.) *contra hypoth.*

Deinde quoniam *a*, *b*, *c*, *d*, sunt in serie harmonica naturali ab vnitate, harmonicè dispositi; sunt denominati à numeris arithmeticè dispositis: (27. h.) quorum denominator *a*, reciprocè minor est de- (26. h.) nominatore *b*, necnon reciprocè minor denomi- (24. h.) natore *c*. & quot sunt numeri omnes medij inter (def. 5. h.) denominatores *a*, *b*; totidem sunt inter denominatores *c*, *d*: totidemque in serie harmonica sunt (27. h.) inter *a*, *b*; totidemque etiam inter *c*, *d*.

Sint ergo inter *a*, *b* termini *e*, *f*: & inter *c*, *d*, totidem termini *g*, *h*: eritque *a*+*e*+*f*, hyperlo- (def. 22 h) garithmus rationis *a*, ad *b*; & *e*+*f*+*b*, hypolo- (def. 23 h) gari-

garithmus eiusdem rationis, inter eosdem terminos a, b. erit quoque $c+g+h$, hyperlogarithmus rationis c ad d; & $g+h+d$, eiusdem hypologarithmus inter eosdem terminos c, d.

Dico a ad c, maiorem esse, quàm $a+e+f$ ad $c+g+h$:

Et $a+e+f$ ad $c+g+h$, maiorem, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$.

Et $e+f+b$ ad $g+h+d$, maiorem, quàm b ad d.

Demonstr.

hypoth. Quoniam a, e, f, b, necnon c, g, h, d, sunt harmonicè ordinati, in serie harmonica naturali
27. b. ab vnitate: ergo eorum denominatores, sunt arithmeticè ordinati, in serie arithmetica naturali ab
sup. vnitate: totidemque sunt a, e, f, b; quot c, g, h,
def. 8. b. d: ergo denominatores a, e, f, b; sunt similiter arithmeticè dispositi, atque denominatores c, g,
16. b. h, d: ergo etiam a, e, f, b sunt similiter harmoni-
def. 16 b cè dispositi, atque c, g, h, d: ergo a, e, c, g sunt
34. b. harmonicè dispositi: ergo permutando a, c, e, g, sunt harmonicè dispositi. Similiter ostendetur, quòd e, g, f, h sunt harmonicè dispositi: necnon f, h, b, d.

def. 19 b Rursum quoniam a, e, f, b sunt harmonicè ordinati, & est a maior, quàm b: ergo a maior, est quàm e; & e, maior, quàm f: & f, quàm b: item
sup. c, maior est quàm g; g, quàm h; h, quàm d. Et
hypoth. quoniam a, c, e, g sunt harmonicè dispositi, & est

def.13b | a, maior, quàm c; ergo & e, maior est, quàm g;
82. b. | item f, quàm h; & b, quàm d. & est a ad e ratio
def.p.4. | altior, ideoque maior, quàm e ad g; & e ad g, altior, & maior, quàm f ad h; & f ad h, altior, & maior, quàm b ad d.

83. b. | Ergo a ad c maior est, quàm vt $a+e+f$ ad $c+g+h$. Quod &c. Et est $a+e+f$ ad $c+g+h$ maior, quàm $e+f$ ad $g+h$: & $e+f$ ad $g+h$ maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$: ergo $a+e+f$ ad $c+g+h$, est maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$. Quod &c. Et est $e+f+b$ ad $g+h+d$, maior, quàm b ad d. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 79. Prop. 91.

SI quatuor quantitatum prima ad secundam maior fuerit, quàm tertia ad quartam: productus extremarum, maior est producto mediarum.

Hypoth.

a; b: maior, quàm c; d.

Dico ad: maiorem esse, quàm bc.

Præpar.

Fiat productus bd.

Demonstr.

9. b. | ad; bd: a; b.
9. b. | bc; bd: c; d.
hypoth. | a; b: maior, quàm c; d.

ad;

13. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
10. 5. | *ad*: maior, quàm *bc*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 80. *Prop.* 92.

SI quatuor quantitatum productus extremarum maior fuerit producto mediarum: erit prima ad secundam maior, quàm vt tertia ad quartam.

Hypoth.

Sunt quatuor quantitates *a*, *b*, *c*, *d*: & est *ad* maior, quàm *bc*.

Dico *a*; *b*; maiorem esse, quàm *c*; *d*.

Præpar.

Assumatur productus *bd*.

Demonstr.

hypoth. | *ad*: maior, quàm *bc*.
8. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
9. *h*. | *ad*; *bd*: *a*; *b*.
9. *h*. | *bc*; *bd*: *c*; *d*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 81. *Prop.* 93.

SI fuerit prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam: fuerit autem & tertia ad quartam maior, quàm vt quinta ad sextam: item quinta ad sextam maior fuerit, quàm vt septima ad octauam: erit composita prima

cum tertia, ad compositam secundam cum quarta, maior, quàm vt composita quinta cum septima, ad compositam sextam cum octaua.

Hypoth.

a	b
c	d
e	f
g	h

$a; b$: maior, quàm $c; d$.
$c; d$: maior, quàm $e; f$.
$e; f$: maior, quàm $g; h$.

Dico $a+c; b+d$: maiorem, quàm $e+g; f+h$.

Præpar.

Fiant producti $af, ah, cf, ch, be, bg, de, dg$.

Demonstr.

	$af+ah$: productus a per $f+h$.
	$cf+ch$: productus c per $f+h$.
29. h.	$af+ah+cf+ch$: productus $a+c$ per $f+h$.
	$be+bg$: productus b, per $e+g$.
	$de+dg$: productus d, per $e+g$.
	$be+bg+de+dg$, productus $b+d$, per $e+g$.
hypoth.	$a; b$: maior, quàm $c; d$.
hypoth.	$c; d$: maior, quàm $e; f$.
13. 5.	$a; b$: maior, quàm $e; f$.
hypoth.	$e; f$: maior, quàm $g; h$.
13. 5.	$a; b$: maior, quàm $g; h$.
13. 5.	$c; d$: maior, quàm $g; h$.

af:

93. b. { *af*: maior, quàm *be*.
ah: maior, quàm *bg*.
cf: maior, quàm *de*.
ch: maior, quàm *dg*. }

af+ah+cf+ch: maior, quàm *be+bg+de+dg*.

94. b. *a+c*; *b+d*: maior, quàm *e+g*; *f+h*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 82. Prop. 94.

SI fuerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eorum ſubmultipli: inter ſimplos terminos altioris rationis hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum depreſſioris, maiorem habebit rationem, quàm inter ſubmultiplos. hypologarithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimplos depreſſioris, minorem habebit, quàm inter ſubmultiplos.

Hypoth.

1(3) 1(4) 1(5) 1(6)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14). 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10): quorum 1(3), maior, quàm 1(6): ideo-

1(3)		1(4)		1(5)		1(6)
1(6)	1(7)	1(8)	1(9)	1(10)	1(11)	1(12)

1(7)		1(8)		1(9)		1(10)
1(14)	1(15)	1(16)	1(17)	1(18)	1(19)	1(20)

def.13b ideoq; & 1(7), maior, quàm 1(10). & esto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10: ideo-
def.p.4. que etiam maior. sint autem & istorum æque-
36. h. submultipli, 1(6), 1(12), 1(14), 1(20), pa-
15. 5. riter harmonicè dispositi, & æquè cum prædictis proportionales. Sumantur etiam inter 1(3), 1(6) medij omnes harmonici 1(4), 1(5): & inter 1(7), 1(10), medij omnes 1(8) 1(9); quorum æquesubmultipli 1(8), 1(10), 1(16), 1(18).
def.16 b Constat quod sicut 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), &
def.19 b similiter 1(7), 1(8), 1(9), 1(10) harmonicè sunt ordinati, sic 1(6), 1(8), 1(10), 1(12), &
15.5. similiter 1(14), 1(16), 1(18), 1(20) sunt harmonicè ordinati, & æquè cum prædictis proportionales. Deinde inter 1(6), 1(12), & inter 1(14), 1(20) sumantur omnes reliqui medij harmonici 1(7), 1(9), 1(11), & 1(15), 1(17), 1(19).

Dico primò 1(3)+1(4)+1(5) ad 1(7)+1(8)+1(9) maiorem esse, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11) ad 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19).

De-

Demonstr.

sup. 1(3); 1(7): 1(6); 1(14).

88. *h.* 1(6); 1(14): maior, quàm 1(7); 1(15).

89. *h.* 1(6); 1(14): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14)+1(15).

13. 5. 1(3); 1(7): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14)+1(15).

Similiter demonstrabitur.

sup. 1(4); 1(8): maior, quàm 1(8)+1(9); 1(16)+1(17). Et

sup. 1(5); 1(9): maior, quàm 1(10)+1(11); 1(18)+1(19).

89. *h.* 1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(8); 1(16).

sup. 1(8); 1(16): 1(4); 1(8).

13. 5. 1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(4); 1(8).

Similiter demonstrabitur.

sup. 1(8)+1(9); 1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9). Et

sup. 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9).

93. *h.* 1(3)+1(4); 1(7)+1(8): maior, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17).

Similiter demonstrabitur.

93. *h.* 1(3)+1(4)+1(5); 1(7)+1(8)+1(9): maior,

1(3) 1(4) 1(5) 1(6)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)

quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19). Quod &c.

Dico secundò 1(4)+1(5)+1(6); 1(8)+1(9)+1(10): maiorem esse, quàm 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20).

Demonstr.

1(7)+1(8); 1(15)+1(16): maior, quàm 1(4); 1(8).
89. b. 1(4); 1(8): maior, quàm 1(9)+1(10); 1(17)+1(18).
1(9)+1(10); 1(17)+1(18): maior, quàm 1(5); 1(9).
93. h. 1(7)+1(8)+1(9)+1(10); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18): maior, quã 1(4)+1(5); 1(8)+1(9).
89. b. 1(4)+1(5); 1(8)+1(9): maior, quàm 1(11)+1(12); 1(19)+1(20).
89. b. 1(11)+1(12); 1(19)+1(20): maior, quàm 1(6); 1(10).
93. h. 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20): maior, quã 1(4)+1(5)+1(6); 1(8)+1(9)+1(10).

Quod

Quod è conuerso est demonstrandum.

Quare &c.

Theor. 83. Prop. 95.

SI fuerint eiusdem rationis duo hyperlogarithmi, alter ex paucioribus, alter ex terminis vno pluribus; & submultiplicati fuerint vtrorumque termini, per alterius multitudinem terminorum: submultipli eius, qui ex paucioribus, & submultipli eius, qui ex pluribus, primi sunt æquales; & reliqui deinceps sunt minores, hoc ordine; secundus eius, qui ex pluribus; & secundus eius, qui ex paucioribus; & tertius eius, qui ex pluribus; & tertius eius, qui ex paucioribus; & sic deinceps. Quod si fuerint hypologarithmi: submultipli eius, qui ex paucioribus, & submultipli eius, qui ex pluribus, vltimi sunt æquales; & reliqui deinceps sunt maiores, hoc ordine; penultimus eius, qui ex pluribus; & penultimus eius, qui ex paucioribus; & tritultimus eius, qui ex pluribus; & tritultimus eius, qui ex paucioribus; & sic deinceps.

Hypoth.

1(*a*)		1(*b*)	1(*c*)
1(*d*)	1(*e*)	1(*f*)	1(*g*)
1(3*a*)		1(3*b*)	1(3*c*)
1(2*d*)	1(2*e*)	1(2*f*)	1(2*g*)

Sint earumdem rationum 1(*a*), ad 1(*c*), & 1(*d*) ad 1(*g*) duo hyperlogarithmi; vnus ex duobus terminis 1(*a*), 1(*b*);

1(*a*)	1(*b*)		1(*c*)
1(*d*)	1(*e*)	1(*f*)	1(*g*)
1(3*a*)	1(3*b*)		1(3*c*)
1(2*d*)	1(2*e*)	1(2*f*)	1(2*g*)

alter ex tribus 1(*d*), 1(*e*), 1(*f*): item duo hypologarithmi, ex duobus 1(*b*), 1(*c*), & ex tribus 1(*e*), 1(*f*), 1(*g*). & subtripli accipiantur 1(3*a*), 1(3*b*), 1(3*c*), necnon subdupli 1(2*d*), 1(2*e*), 1(2*f*), 1(2*g*).

Dico 1(3*a*), 1(2*d*) esse æquales: necnon 1(3*c*), 1(2*g*) esse æquales: & hoc ordine, priores maiores esse, & posteriores minores 1(3*a*), 1(2*e*), 1(3*b*), 1(2*f*), 1(3*c*).

Demonstr.

24. *h.*	1(*a*); 1(*c*): 1(*d*); 1(*g*): *c*; *a*: *g*; *d*
p. p.	*c*; *g*: *a*; *d*: *c*—*a*; *g*—*d*.
27. *h.*	*c*—*a*: 2. *g*—*d*: 3.
11. 5.	*c*; *g*: *a*; *d*: 2; 3.
31. *h.*	3*c*: 2*g*. 3*a*: 2*d*.
10. *h.*	1(3*c*): 1(2*g*). 1(3*a*): 1(2*d*). Quæ &c.
6. *h.*	2*g*—2*f*: 2*f*—2*e*: 2*e*—2*d*: 2.
6. *h.*	3*c*—3*b*: 3*b*—3*a*: 3.
	3*a*, 2*e*, 3*b*, 2*f*, 3*c* sunt, hoc ordine, minores, & deinceps maiores.
10. *h.*	1(3*a*), 1(2*e*), 1(3*b*), 1(2*f*), (13*c*) sunt, hoc ordine, maiores, & deinceps minores. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 84. *Prop.* 96.

SI fuerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eorum ſubdupli; alijque ſubtripli; & ſubquadrupili, & ſic deinceps in infinitum: inter ſimplos terminos altioris, rationis hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum depreſſioris maiorem habet rationem, quàm inter ſubduplos: & inter ſubduplos, maiorem, quàm inter ſubtriplos; & ſic deinceps. hypologarithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimplos depreſſioris, minorem habet rationem, quàm inter ſubduplos; & inter ſubduplos, minorem, quàm inter ſubtriplos; & ſic deinceps.

Hypoth.

1(3) 1(4) 1(5) 1(16)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)
1(9) 1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)
1(21) 1(22) 1(23) 1(24) 1(25) 1(26) 1(27) 1(28) 1(29) 1(30)

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10); quorum 1(3) maior, quàm 1(6); ideoque, & 1(7) maior, quàm 1(10). Et eſto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10). Sint autem iſtorum ſubdupli 1(6), 1(12), 1(14), 1(20): & ſubtripli 1(9), 1(18), 1(21), 1(30). inter quos accipiantur medij harmonici, & ex his Hyperloga-

1(3)			1(4)			1(5)			1(16)
1(6)	1(7)		1(8)	1(9)		1(10)	1(11)		1(12)
1(9)	1(10)	1(11)	1(12)	1(13)	1(14)	1(15)	1(16)	1(17)	1(18)

1(7)			1(8)			1(9)			1(10)
1(14)	1(15)		1(16)	1(17)		1(18)	1(19)		1(20)
1(21)	1(22)	1(23)	1(24)	1(25)	1(26)	1(27)	1(28)	1(29)	1(30)

logarithmi, & Hypologarithmi.

94. *b.* Constat primò, quòd inter simplos, maior est hyperlogarithmus altioris, ad hyperlogarithmum depressioris, quàm inter subduplos: & hypologarithmus minor.

Dico 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19): maiorem esse, quàm 1(9)+1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17); 1(21)+1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29).

Præpar.

Sumantur ipsorum 1(6), 1(7), 1(4), 1(5) subtripli: & 1(9), 1(10), 1(11), 1(21), 1(22), 1(23) subdupli.

Demonstr.

95. *b.* 1(18), 1(20), 1(21), 1(22) sunt maiores, & deinceps minores.

95. *b.* 1(42), 1(44), 1(45), 1(46) sunt maiores, & deinceps minores.

40. *b.* 1(18), 1(20), 1(21), 1(22), & 1(42), 1(44), 1(45), 1(46) sunt similiter harmonicè dispositi.

1(18),

88. b. 1(18); 1(42): maior, quàm 1(20); 1(44).
1(20); 1(44): maior, quàm 1(21); 1(45).
1(21); 1(45): maior, quàm 1(22); 1(46).

36. b. 1(18), 1(22), 1(42), 1(45) similiter proportionales, atque 1(6), 1(7), 1(14), 1(15).
1(18), 1(20), 1(22), 1(42), 1(44), 1(46) similiter proportionales, atque 1(9), 1(10), 1(11), 1(21), 1(22), 1(23).

89. b. 1(6); 1(14): maior, quã 1(9)+1(10); 1(21)+1(22).

89. b. 1(9)+1(10); 1(21)+1(22): maior quàm 1(7); 1(15).

13. 5. 1(7); 1(15): maior, quàm 1(11; 1(23).

sup. 1(11); 1(23): maior, quàm 1(8); 1(16).
1(8); 1(16): maior, quàm 1(12)+1(13); 1(24)+1(25).
1(12)+1(13); 1(24)+1(25): maior, quàm 1(9); 1(17).
Et sic deinceps quoad fuerint termini.

93. b. 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10+1(11); 1(14)+1(15+1(16)+1(17)+1(18)+1(19): maior, quã 1(9)+1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17; 1(21)+1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29). Quod &c.

Dico etiam 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20): minorem esse, quàm 1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+(15)+1(16)

1(3)			1(4)			1(5)			1(6)
1(6)		1(7)		1(8)	1(9)	1(10)		1(11)	1(12)
1(9)	1(10)	1(11)	1(12)	1(13)	1(14)	1(15)	1(16)	1(17)	1(18)

1(7)			1(8)			1(9)			1(10)
1(14)		1(15)	1(16)		1(17)	1(18)		1(19)	1(20)
1(21)	1(22)	1(23)	1(24)	1(25)	1(26)	1(27)	1(28)	1(29)	1(30)

+1(16)+1(17)+(1(18); 1(22)+1(23)+1(24)+1(25)
+1(26)+1(27)+1(28)+1(29)+1(30).

Demonstr.

sup. 1(10); 1(22): maior, quàm 1(7); 1(15).
1(7); 1(15): maior, quàm 1(11)+1(12); 1(13)+1(14).
1(11)+1(12); 1(23)+1(24): maior, quàm 1(8); 1(16).
1(8); 1(16): maior, quàm 1(13); 1(25).
Et sic deinceps, quoad fuerint termini.

93. b. 1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18); 1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29)+1(30): maior, quàm 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20). Quod è conuerso &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 85. Prop. 97.

EIusdem rationis numerotæ inter maiores terminos, maior est hyperlogarithmus ad hypologarithmum, quàm inter minores.

Demonstr.

Nàm sunt maiores, & deinceps minores, hoc
54. *h.* ordine, hyperlogarithmus inter maiores termi-
57. *h.* nos, hyperlogarithmus inter minores, hypologa-
56. *h.* rithmus inter minores, & hypologarithmus inter
8. 5. maiores. Quare inter maiores, hyperlogarithmus ad hypologarithmum, maior est, quàm inter minores.

Theor. 86. Prop. 98.

E Serie harmonica naturali ab vnitate, terminorum harmonicè dispositorum, altioris rationis logarithmus ad logarithmum depressioris, minor est, quàm vt hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum; & maior, quàm vt hypologarithmus ad hypologarithmum.

Hypoth. commun.

A		*B*	*C*			*D*
			N			*O*
G	*H*			*I*	*K*	
R	*S*			*P*	*Q*	
	E			*F*		

Sint è serie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini *A*, *B*, *C*, *D*, harmonicè dispositi: quorum ratio *A*

A *B* *C* *D*
N *O*
G *H* *I* *K*
R *S* *P* *Q*
E *F*

ad *B*, altior, quàm *C* ad *D*. Et ſit rationis *A* ad *B*, logarithmus *E*: & rationis *C* ad *D*, logarithmus *F*. Sint autem inter *A*, *B*, *C*, *D*, vel inter æqueproportionales numeroſos terminos hyperlogarithmi, & hypologarithmi: rationis quidem *A* ad *B*, hyperlogarithmus *G*, & hypologarithmus *H*: & rationis *C* ad *D*, hyperlogarithmus *I*, & hypologarithmus *K*.

Dico *E* ad *F* minorem eſſe, quàm *G* ad *I*; maiorem, quàm *H* ad *K*.

Præpar.

Eſto, ſi poteſt, *E* ad *F*, maior, quàm *G* ad *H*: & ſumatur *L* ad *M* ratio, quæ cum ratione *G* ad *H*, componit rationem, *E* ad *F*. Et quoniam minor, quàm *E*, eſt ad *F*, vt *G* ad *H*: *L* ad *M*, eſt vt *E* ad minorem, quàm *E*: quare *L*,
62. *b.* maior eſt, quàm *M*. Inueniatur rationis *C* ad *D* hyperlogarithmus *N*, qui ſit minor ad hypologarithmum *O*, quàm vt *L* ad *M*. Quod ſi termini, inter quos cenſentur *N*, *O*, non ſunt minores, quàm inter quos *H*, *K*; ſumantur alij minores æqueproportionales ad *C*, *D*, necnon alij

æque-

æqueproportionales ad *A*, *B*: inter quos rationis quidem *C* ad *D* ſint hyperlogarithmus *P*, & hypologarithmus *Q*; & rationis *A* ad *B* hyperlogarithmus *R*, & hypologarithmus *S*.

Demonſtr.

96. *h.* | *R*; *P*: minor eſt, quàm *G*; *H*.
97. *h.* | *P*; *Q*: minor, quàm *N*; *O*: & minor, quàm *L*; *M*.
4. 3. | *R*; *Q*: minor, quàm *G*; *H*,+*L*; *M*.
ſuppoſ. | *E*; *F*: *G*; *H*,+*L*; *M*.
13. 5. | *R*; *Q*: minor, quàm *E*; *F*. *contra* 82. *h.*

Ergo *E* ad *F*, non eſt maior, quàm *G* ad *H*.

Præpar.

Eſto *E* ad *F*, eadem, quæ *G* ad *H*, ſi poteſt: & inter minores terminos, quàm quos inter ſunt hyperlogarithmi *G*, *H*, ſumantur alij *R*, *P*.

Demonſtr.

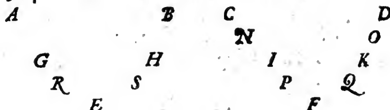
96. *h.* | *G*; *H*: maior, quàm *R*; *P*.
ſuppoſ. | *E*; *F*: *G*; *H*.
13. 5. | *E*; *F*: maior, quàm *R*; *P*. *contra demonſtrata ſuperiùs*.

Ergo *E* ad *F*, non eſt, vt *G* ad *H*.

Ergo *E* ad *F*, eſt minor, quàm vt *G* ad *H*. Quod &c.

Præpar.

Eſto deinde *E* ad *F*, minor, quàm *I* ad *K*: & ſumatur *L* ad *M* ratio, quæ cum *E* ad *F*, rationem *I* ad *K* componit. Et quoniam maior, quàm *E*, ad *F*, eſt vt *I* ad *K*: *L* ad *M*, eſt vt maior, quàm *E*, ad *E*: & *L*, ma-



ior eſt, quàm *M*. Deinde fiant eadem, quæ ſupra.

Demonſtr.

82. *h.*	*S*; *P*: minor eſt, quàm *E*; *F*.
præpar.	*P*; *Q*: minor, quàm *L*; *M*.
4. 3.	*S*; *Q*: minor, quàm *E*; *F*,+*L*; *M*.
ſuppoſ.	*I*; *K*: *E*; *F*,+*L*; *M*.
13. 5.	*S*; *Q*: minor, quàm *I*; *K*. *contra* 96. *h*.

Præpar.

Ergo *E* ad *F* non eſt minor, quàm *I* ad *K*.

Præpar.

Eſto *E* ad *F*, eadem, quæ *I* ad *K*: & inter minores terminos, quàm quos inter ſunt hypologarithmi *I*, *K*, ſumantur alij *S*, *Q*.

Demonſtr.

ſuppoſ.	*E*; *F*: *I*; *K*.
96. *h*.	*I*; *K*: minor eſt, quàm *S*; *Q*.
13. 5.	*E*; *F*: minor, quàm *S*; *Q*. *contra ſuperiùs demonſtrata*.

Ergo *E* ad *F*, non eſt eadem, quæ *I* ad *K*.
Ergo *E* ad *F*, eſt maior, quàm *I* ad *K*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 87. *Prop.* 99.

Qvatuor terminorum è ſerie harmonica naturali ab vnitate diſpoſitorum harmonicè, altioris rationis maior terminus ad maiorem depreſſioris, maior eſt, quàm vt logarithmus ad logarithmum: & logarithmus ad logarithmum, maior, quàm vt minor ad minorem.

Hypoth.

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini *a*, *b*, *c*, *d*, harmonicè diſpoſiti: quorum ratio *a* ad *b*, altior, quàm *c* ad *d*: & *a*, maior, quàm *b*: ideoque etiam *c*, maior, quàm *d*. Et eſto rationis *a* ad *b*, logarithmus *e*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Dico *a*; *c*: maiorem, quàm *e*; *f*.

Et *e*; *f*: maiorem, quàm *b*; *d*.

Præpar.

Rationis *a* ad *b*, ſumantur hyperlogarithmus *g*, & hypologarithmus *h*: & rationis *c* ad *d*, hyperlogarithmus *l*, & hypologarithmus *m*.

Demonſtr.

90. *h*. | *a*; *c*: maior, quàm *g*; *l*.
98. *h*. | *g*; *l*: maior, quàm *e*; *f*.
98. *h*. | *e*; *f*: maior, quàm *h*; *m*.
90. *h*. | *h*; *m*: maior, quàm *b*; *d*.
13. 5. | *a*; *c*: maior, quàm *e*; *f*. Quod &c.
13. 5. | *e*; *f*: maior, quàm *b*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 88. *Prop.* 100.

Quatuor numerorum arithmeticè dispositorum, ratio primi ad secundum, totuplicata, quotus est primus, maior est, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus est quartus: atque totuplicata ratio primi ad secundum, quotus est secundus, minor est, quàm totuplicata tertij ad quartum, quotus est tertius.

Hypoth.

Sint quatuor numeri arithmeticè dispositi *a*, *b*, *c*, *d*.

Dico rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus est *a*, maiorem esse, ratione *c* ad *d*, totuplicata, quotus est *d*: & rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus est *b*, minorem esse, ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*.

Præparatio.

Sumantur in serie harmonica naturali ab vnitate termini æqueordinati cum numeris *a*, *b*, *c*, *d*, in serie arithmetica naturali: nempe vnitates denominatæ ab ipsis: 1(*a*), 1(*b*), 1(*c*), 1(*d*). Et esto rationis *c* ad *b*, logarithmus *e*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Demonstr. p.

Terminus *a*, vel minor est, vel maior, quàm *b*: & rursum *a*, vel minor est, vel maior, quàm *c*. Esto *a*, minor, quàm *b*: & minor, quàm *c*.

hypoth.	*a*, *b*, *c*, *d*: arithmeticè dispositi.
14. *h.*	1(*a*), 1(*b*), 1(*c*), 1(*d*): harmonicè dispositi.
sup.	1(*a*): maior, quàm 1(*b*): & maior, quàm 1(*c*).
83. *h.*	1(*a*); 1(*b*): altior, & maior, quàm 1(*c*); 1(*d*).

1(*a*);

65. b. 1(*a*); 1(*b*): logarithmus *e*.
65. b. 1(*c*); 1(*d*): logarithmus *f*.
12. b. 1(*a*): maior, quàm 1(*b*).
def. 13 b 1(*c*): maior, quàm 1(*d*).
8. 5. 1(*a*); 1(*d*): maior, quàm 1(*a*); 1(*c*).
99. b. 1(*a*); 1(*c*): maior, quàm *e*; *f*.
99. b. *e*; *f*: maior, quàm 1(*b*); 1(*d*).
8. 5. 1(*b*); 1(*d*): maior, quàm 1(*b*); 1(*c*).
13. 5. 1(*a*); 1(*d*): maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. *e*; *f*: maior, quàm 1(*b*); 1(*c*).
12. b. 1(*a*); 1(*d*): *d*; *a*.
12. b. 1(*b*); 1(*c*): *c*; *b*.
13. 5. *d*; *a*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. *e*; *f*: maior, quàm *c*; *b*.
91. b. *df*: maior, quàm *ae*.
91. b. *eb*: maior, quàm *fc*.

hypoth. Et quoniam *f*, logarithmus est rationis *c* ad *d*:
73. b. ergo *df*, logarithmus est rationis *c* ad *d*, totu-
hypoth. plicatæ, quotus est *d*. item quoniam *e*, logari-
73. b. thmus est rationis *a* ad *b*: ergo *ae*, logarithmus est rationis *a* ad *b* totuplicatæ, quotus est *e*. Et
74. b. vt *ae* ad *df*, ita est ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*, ad rationem *c* ad *d* totuplicatam quo-
71. b. tus est *d*. est autem *ae*, minor, quàm *df*: ergo ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*, depressior
hypoth. est *a* ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*. est
def. 5. b. autem *a* minor, quàm *b*; & *c*, minor, quàm *d*:
Ergo

def.2.4. Ergo maior est ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*. Quod &c.

73. h. Similiter ostendetur, quod *eb*, logarithmus est rationis *a* ad *b*, totuplicatæ, quotus est *b*: & *fc*
sup. logarithmus *c* ad *d* totuplicatæ, quotus est *c*: sed
71. h. est *eb*, maior, quàm *fc*: ergo ratio *a* ad *b* totuplicata quotus est *b*, altior est, quàm *c* ad *d* totu-
hypoth. plicata quotus est *c*. & est *a* minor, quàm *b*; &
def.5.h. *c* minor, quàm *d*: ergo minor est ratio *a* ad *b* to-
def p.4. tuplicata, quotus est *b*, quàm ratio *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*. Quod &c.

Demonstr. 2.

Esto *a*, minor, quàm *b*: & maior, quàm *c*.
hypoth. ergo *c*, *d*, *a*, *b*, sunt quatuor numeri arithmeticè
def.5.h. dispositi; quorum *c*, minor est, quàm *d*; & mi-
sup. nor, quàm *a*. Et ratio *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*, maior est, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *b*: & *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*, minor, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*. Quod &c.

Demonstr. 3.

Esto *a*, maior, quàm *b*, & minor, quàm *c*.
hypoth. Ergo *b*, *a*, *d*, *c*, sunt quatuor numeri arithmeti-
def.5.h. cè dispositi; quorum *b*, minor, quàm *a*; & mi-
sup. nor, quàm *d*. Et ratio *b* ad *a* totuplicata, quotus est *b*, maior, quàm *d* ad *c* totuplicata, quotus

tus est *c*: & *b* ad *a* totuplicata, quotus est *a*, minor, quàm *d* ad *c* totuplicata, quotus est *d*. Et
2.3. conuertendo *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*, maior, quàm *c* ad *d*, totuplicata, quotus est *d*: & *a* ad *b* totuplicata, quotus est *b*, minor, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*. Quod &c.

Demonstr. 4.

Esto *a* maior vtrisque *b*, & *c*: eritque *d* minor
def.5.h. *sup.* vtrisque *c*, & *b*. Sunt ergo quatuor numeri *d*, *c*, *b*, *a* dispositi arithmeticè: quorum ratio *d* ad *c* totuplicata, quotus est *d*, maior, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus est *a*: & *d* ad *c* totuplicata, quotus est *c*, minor, quàm *b* ad *a* totuplicata,
2.3. quotus est *b*. Et conuertendo, *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*, minor, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*: & *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*, maior, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *b*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 89. *Prop.* 101.

SI fuerint quatuor numeri arithmeticè dispositi, & primus maior secundo; fuerint autem & alij duo numeri, quintus ad sextum, maior quàm vt primus ad quartum: erit primi ad secundum totuplicata ratio, quotus est quintus, maior, quàm tertij ad quartum totuplicata ratio, quotus est sextus.

Hypoth.

def.5.h. Sint quatuor arithmeticè dispositi numeri *a*, *b*, *c*, *d*: & sit primus *a*, maior secundo *b*; ideoque etiam tertius *c*, maior quarto *d*: & sint alij duo, quintus *e* ad sextum *f*, maior quàm *a* ad *d*.

Dico rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus est *e*, maiorem esse ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus est *f*.

Præpar.

Rationis *a* ad *b*, logarithmus assumatur *g*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *h*.

Demonstr.

100.h. Ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*, maior est ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*: &
hypoth. ambæ sunt maioris inæqualitatis: ergo ratio *a* ad
def.p.4. *b* totuplicata, quotus est *a*, altior est, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*. Est autem rationis *a*
73. h. ad *b* totuplicatæ, quotus est *a*, logarithmus *ag*: & rationis *c* ad *d* totuplicatæ, quotus est *d*, loga-
hypoth. rithmus *hd*: ergo *ag* maior est, quàm *hd*. Et quo-
p.3. 9.h. niam *e* ad *f* maior est, quàm vt *a* ad *d*: permutando, *e* ad *a*, maior est, quàm vt *f* ad *d*. Sed *e* ad *a*, est vt *eg* ad *ag*: & *f* ad *d*, vt *fh* ad *dh*.
13.5. Ergo *eg* ad *ag*, maior est, quàm vt *fh* ad *dh*: &
p.3. permutando, *eg* ad *fh*, maior, quàm vt *ag* ad *dh*.
73.h. Et est *eg*, logarithmus rationis *a* ad *b* totuplicatæ, quotus est *e*: & *fh*, logarithmus rationis *c* ad
71. h. *d* totuplicatæ, quotus est *f*. ergo ratio *a* ad *b*

totu-

totuplicata, quotus est *e*, altior est ratione *c* ad *d*
hypoth. totuplicata, quotus est *f*. Et vtraque maioris est
def.p.4. inæqualitatis. Ergo ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus est *e*, maior est ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus est *f*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 90. Prop. 102.

SI fuerint quatuor numeri arithmeticè dispositi, & primus minor secundo; fuerint autem & alij duo numeri, quintus ad sextum, minor, quàm vt primus ad quartum: erit primi ad secundum totuplicata ratio, quotus est quintus, maior, quàm tertij ad quartum totuplicata ratio, quotus est sextus.

Hypoth.

Sint quatuor numeri arithmeticè dispositi, *a*, *b*,
def.5.b. *c*, *d*: & sit *a*, minor, quàm *b*: ideoque etiam *c*, minor, quàm *d*: & sit *e*, ad *f*, minor, quàm vt *a* ad *d*.

Dico *a* ad *b* totuplicatam rationem, quotus est *e*, maiorem esse ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus est *f*.

Demonstr.

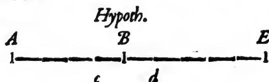
hypoth. Sunt enim *d*, *c*, *b*, *a*, arithmeticè dispositi: & est
2. 3. *d*, maior, quàm *c*: & *f* ad *e*, maior, quàm *d* ad *a*:
101. h. ergo *d* ad *c* totuplicata, quotus est, *f* maior est, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus est *e*: & conuer-
2. 3. tendo *c* ad *d* totuplicata, quotus est *f*, minor,

quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *e*. Quod &c.
Quare &c.

Probl. 13. *Prop.* 103.

DAta quantitate, dataque ratione inæqualitatis, inuenire terminos in data ratione, quorum differentia est quantitas data.

Hypoth.



Sit data quantitas *A B*, dataque ratio *c* ad *d*: & esto *c*, maior, quàm *d*.

Oportet inuenire terminos in ratione *c* ad *d*, quorum excessus *A B*.

Constr.

Fiat *c—d*; *d*: *AB*; *BE*.
Dico *AE*; *EB*: *c*; *d*.

Demonstr.

constr.	*AB*; *BE*: *c---d*; *d*.
2. *p.*	*AE*; *EB*: *c*; *d*. Quod &c.

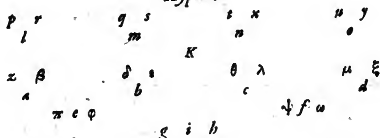
Quare &c.

Theor. 91. *Prop.* 104.

SI quatuor quantitatum non numerosas rationes habentium, harmonicè dispositarum, prima maior fuerit, quàm vtralibet secunda, & tertia: logarithmus rationis pri-

primæ ad ſecundam ad logarithmum tertiæ ad quartam, non erit maior, quàm vt prima ad tertiam, nec minor, quàm vt ſecunda ad quartam.

Hypoth.



Sunto quatuor quantitates harmonicè diſpoſitæ, *a*, *b*, *c*, *d*: quarum *a*, maior, quàm *b*, & maior, quàm *c*. & ſunto *a* ad *b*, & *c* ad *d*, rationes non numeroſæ. & rationis *a* ad *b*, eſto logarithmus *e*: rationis autem *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Dico *e* ad *f*, non maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*; nec minorem, quàm vt *c* ad *d*.

Suppoſito falſa alternatiua.

Eſto, ſi fieri poteſt, vel maior *e* ad *f*, quàm vt *a* ad *b*, ratione *g* ad *h*, maioris inæqualitatis, vel minor, quàm vt *c* ad *d*, ratione *g* ad *h*, maioris inæqualitatis.

Præpar.

Fiat *g*; *i*: *i*; *h*. Sumatur quantitas *K*.

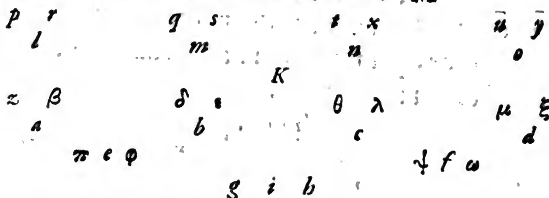
Fiat *a*; *K*: *K*; *l*.

b; *K*: *K*; *m*.

c; *K*: *K*; *n*.

d; *K*: *K*; *o*.

Da-



77. *h.* Datis non numerosis rationibus *a* ad *b*, & *c* ad *d*, vel *m* ad *l*, & *o* ad *n*: dataque ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*, maioris inæqualitatis, quatuor inueniantur numerosæ rationes, *p* ad *q*, altior, quàm *l* ad *m*; & *r* ad *s* depressior: propiores æqualitati logarithmicæ, quàm vt in ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*.

88. *h.* Et quoniam *a* ad *b*, ratio est altior, quàm *c* ad
24. *h.* *d*: & sunt *l*, *m*, *n*, *o*, reciprocè, sicut *a*, *b*, *c*, *d*:
2. 3. etiam *l* ad *m*, ratio est altior, quàm *n* ad *o*. Itaq; si forte contingeret *r* ad *s*, non altior, quàm *n* ad
76. *h.* *o*: inueniatur altera *r* ad *s*, depressior quidem, quàm *l* ad *m*; sed ei propior; atque altior, quàm
76. *h.* *n* ad *o*. Et similiter inueniatur *t* ad *u*, depressior,
77. *h.* quàm *r* ad *s*; altior, quàm *n* ad *o*: necnon inueniatur *x* ad *y*, depressior, quàm *n* ad *o*; vt fiant *t* ad *u*, & *x* ad *y*, propiores æqualitati logarithmicæ, quàm vt in ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*.

103. *h.* Dataque differentia *l*, *m*: datis quoque rationibus *p*, ad *q*, *r* ad *s*, *t* ad *u*, *x* ad *y*, inueniantur

tur earumdem termini p, q, r, s, t, u, x, y, easdem habentes rationes, & eamdem differentiam l, m.

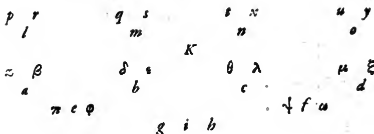
Fiat $p; K: K; \zeta$.
$r; K: K; \beta$.
$q: K: K; \delta$.
$s; K: K; \iota$.
$t; K: K; \theta$.
$x; K: K; \lambda$.
$u; K: K; \mu$.
$y; K: K; \xi$.

Et rationis ζ ad δ, logarithmus esto π.
rationis β ad ι, logarithmus ς.
rationis θ ad μ, logarithmus ψ.
rationis λ ad ξ, logarithmus ω.

Demonstr. commun.

hypoth. | a, b, c, d, sunt harmonicè dispositæ.
33. *h.* | l, m, n, o, arithmeticè dispositæ.
hypoth. | a, maior, quàm b: & maior, quàm c.
24. *h.* | l, minor, quàm m: & minor, quàm n.
constr. | $p, q; l, m; r, s; t, u; n, o; x, y$: binæ, & binæ sunt arithmeticè dispositę, antecedentes minores consequentibus.
def. 34. *h* | π : maior, quàm e. & e; maior, quàm ς.
ψ: maior, quàm f. & f: maior, quàm ω.
constr. | Et quoniam g, ad i, maior est logarithmicè, quàm vt ratio ζ ad δ, ad rationem β ad ι: ratio
12. 4. | autem ζ ad δ, ad rationem β ad ι, logarithmicè

maior



81. b. maior eſt, quàm vt ad rationem *a* ad *b*: & ratio *z* ad *δ*, ad rationẽ *a* ad *b*, eſt logaritmicè, vt *π* ad
13. 5. *e*: ergo *g* ad *i* eſt maior, quàm vt *π* ad *e*. Similiter oſtendetur *g* ad *i*, maior, quàm *e* ad *φ*: & maior, quàm *ψ* ad *f*: & maior, quàm *f* ad *ω*.

conſtr. Deinde quoniam *p* ad *q*, vel *z* ad *δ* ratio eſt
ſup. altior, quàm *l* ad *m*, vel *a* ad *b*; & ſunt *z*, *δ*,
hypoth. *a*, *b* harmonicè diſpoſitæ; & eſt *a*, maior, quàm
7. 5. *b*: oportet *z*, & *δ* maiores eſſe, quàm *a*, *b*. ſi enim eſſent æquales; eſſet ratio *z* ad *δ*, æquealta rationi *a* ad *b*: ſi verò eſſet *z*, minor, quàm *a*;
def.13 b ideoque & *δ*, minor, quàm *b*; eſſet ratio *z* ad *δ*,
88. b. depreſſior, quàm *a* ad *b*: contra aſſumptum. Similiter oſtendetur, quòd *a*, maior eſt, quàm *β*; & *b*, quàm *ι*: item *θ*, maior, quàm *c*; & *μ*, quàm *d*: & *c*, quàm *λ*; & *d*, quàm *ξ*.

Suppoſitio falſa prima.

Eſto *e* ad *f*, maior, quàm *a* ad *c*: ſi poteſt.

De-

Demonstr. p.

præpar.	$e; f: a; c, +g; i, +i; h.$
def.5.6.	$e; \varphi, +\varphi; \psi, +\psi; f: e; f.$
11.5.	$e; \varphi, +\varphi; \psi, +\psi; f: a; c, +g; i, +i; h.$
sup.	$e; \varphi$: minor, quàm $g; i.$
sup.	$\psi; f$: minor, quàm $i; h.$
4.3.	$\varphi; \psi$: maior, quàm $a; c.$ si enim esset eadem, vel minor: esset $e; f$: minor, quàm $a; c, +g; h.$ contra assumptum.
præpar.	Sunt autem $\beta, \iota, \theta, \mu$, harmonicè dispositæ quantitates, numerosasque habentes rationes; &
25.*b.*	proportionales sicut quidam termini è serie harmonica naturali ab vnitate: quorum rationis β ad
præpar.	ι, logarithmus est φ; & rationis θ ad μ, logarithmus est ψ. Est autem sicut r ad s ratio altior,
sup.	quàm t ad u: sic β ad ι, altior, quàm θ ad μ: & est β, maior, quàm ι; ideoque & θ, maior,
99.*b.*	quàm μ. Ergo β ad θ, maior est, quàm φ ad ψ.
13.5.	Ergo β ad θ, maior est, quàm a ad c. *contra* 8.5.

Ergo e ad f, non maior est, quàm a ad c. Quod &c.

Suppos. fals. 2.

Esto e ad f, minor, quàm b ad d, si potest.

Demonstr. 2.

præpar.	$e; f, +g; h: b; d.$
sup.	$\pi; e$: minor, quàm $g; i.$
sup.	$f; \omega$: minor, quàm $i; h.$
sup.	$\pi; \omega$: minor, quàm $e; f, +g; h.$

13. 5. π; ω: minor, quàm b; d.

Sunt autem ζ, δ, λ, ξ, harmonicè dispositæ,
præpar. numerosas rationes habentes; & proportionales,
25. h. sicut quidam termini è serie harmonica naturali
præpar. ab vnitate: quorum rationis ζ ad δ, logarithmus
est π; & rationis λ ad ξ, logarithmus est ω: &
sup. est ζ ad δ ratio altior, quàm a ad b; sicut p ad
q, altior, quàm l ad m: & l ad m altior, quàm
n ad o, vel c ad d: & c ad d, altior, quàm λ ad
ξ; sicut n ad o, altior, quàm x ad y: ergo ζ ad
δ, altior est, quàm λ ad ξ: & est ζ, maior, quàm
99. b. δ; & λ, maior, quàm ξ: Ergo π ad ω maior
13. 5. est, quàm δ ad ξ. Ergo δ ad ξ minor est, quàm
b ad d. *contra* 8. 5.

Ergo e ad f, non minor est, quàm b ad d. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 92. *Prop.* 105.

QVatuor arithmeticè dispositarum quantitatum, si prima ad vltimam, fuerit vt numerus ad numerum: erit primæ ad secandam totuplicata ratio, quotus est homologus primæ, maior, quàm tertiæ ad quartam totuplicata ratio, quotus est homologus quartæ. quòd si secunda ad tertiam fuerit vt numerus ad numerum: erit primæ ad secundam totuplicata ratio, quotus est homologus secundæ, minor, quàm tertię ad quartam totuplicata, quotus est homologus tertiæ.

Hy-

Hypoth.

Sunto quatuor arithmeticè diſpoſitæ quantitates A, B, C, D. & eſto, vel alterutrum, vel vtrumque iſtorum, videlicet: A ad D, vt numerus a, ad numerum d: & B ad C, vt numerus b, ad numerum c.

Dico rationem A ad B totuplicatam, quotus eſt a, maiorem eſſe ratione C ad D totuplicata, quotus eſt d: & rationem A ad B totuplicatam, quotus eſt b, minorem ratione C ad D totuplicata, quotus eſt c.

Præpar. commun.

Sumatur rationalis u: & per quantitates denominetur arithmeticè diſpoſitas, vt fiant fractiones
13.b. $u(A)$, $u(B)$, $u(C)$, $u(D)$, harmonicè diſpoſitæ. Sitque rationis A ad B logarithmus e: & rationis C ad D, logarithmus f.

Demonſtr. p.

Quantitatum A, B, C, D, vel duæ tantùm extremæ A, D, erunt vt numeri; vel duæ tantùm mediæ B, C: vel binæ tantùm extremæ inuicem A, D; & mediæ inuicem B, C: vel tres inuicem ſunt vt numeri.

4.8. Sunto tres inuicem A, B, C, vt numeri: & aſſumantur tres numeri g, h, i proportionales, vt
def.5.b. A, B, C: quod ſi A, minor eſt, quàm B; etiam C,
2.p. minor eſt, quàm D; & g minor, quàm h. & per homologiam, eſt defectus g, h, ad i, vt defectus A, B, ad C: addatur defectus g, h, numero i, &
2.p. fiat numerus l. erit ergo componendo vt l ad i,

 ita

def.5.h. ita D ad C. Si verò A, maior eſt, quàm B: profectò C, maior eſt, quàm C --- D, vel quàm A
2.p. --- B: & per homologiam, ſicut C, maior eſt, quàm A --- B, ita i, maior eſt, quàm g --- h. Auferatur itaque g --- h, ab i numero; & relinquatur l: &
2.p. erit, diuidendo, C ad D, vt i ad l.

Quare A, B, C, D ſunt proportionales inuicem, vt numeri, g, h, i, l. & numeri g, h, i, l, ſunt arithmeticè diſpoſiti: quorum ratio g ad h
100. h. totuplicata, quotus eſt g, maior eſt, quàm ratio i ad l totuplicata, quotus eſt l: & ratio g ad h totuplicata, quotus eſt h, minor, quàm ratio i ad l
6.4. totuplicata, quotus eſt i. Sed g ad h totuplicata ratio, quotus eſt g, ad eamdem totuplicatam, quotus eſt a, eſt logarithmicè, vt g ad a: & i ad l totuplicata, quotus eſt l, eſt logarithmicè ad eamdem totuplicatam, quotus eſt d, vt l ad d. Et quoniam g ad l eſt vt A ad D: & A ad D, vt
11.5. a ad d: ergo g ad l, eſt vt a ad d: & permutan-
2.p. 15.4. do g ad a, vt l ad d. Ergo ratio g ad h totuplicata, quotus eſt g, ad eamdem totuplicatam, quotus eſt a, eſt vt i ad l totuplicata, quotus eſt l,
18.4. ad eamdem totuplicatam, quotus eſt d. Ergo ſi g ad h totuplicata, quotus eſt g, altior eſt, quàm i ad l totuplicata, quotus eſt l, etiam g ad h totuplicata, quotus eſt a, altior eſt, quàm i ad l totuplicata, quotus eſt d: ſi depreſsior, depreſsior.

ergo

100.*b.* ergo ſicut *g* ad *h* totuplicata, quotus eſt *g*, maior eſt, quàm *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *l*; ſiue
def.5.b. ſint *g* ad *h*, & *i* ad *l* rationes maioris inæqualitatis, ſiue ſint minoris ambæ: erit & *g* ad *h* totu-
deff. 1. & 2.4. plicata, quotus eſt *a*, maior, quàm *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *d*. Et eſt *g* ad *h*, eadem, quæ *A* ad *B*: & *i* ad *l*, eadem, quæ *C* ad *D*. ergo *A* ad *B* totuplicata ratio, quotus eſt *a*, maior eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*. Quod &c.

Simili prorus demonſtratione oſtendetur, quòd ratio *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*, minor eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*. Quod &c.

Demonſtr.2.

Sunto vel duo tantùm extremi *A*, *D*, vt numeri; vel duo tantùm medij *C*, *D*; vel bini, & bini *A*, *D*, & *B*, *C*; non autem tres, aut quatuor. profectò vel eſt quantitas *A*, minor, quàm *B*, vel maior: & rurſum quantitas *A*, minor, quàm *C*, vel maior.

Eſto *A*, minor, quàm *B*, & minor, quàm *C*.

14. *b.* | *u*(*A*), *u*(*B*), *u*(*C*), *u*(*D*), ſunt harmonice diſpoſiti.
12. *b.* | *u*(*A*): maior, quàm *u*(*B*).
12. *b.* | *u*(*A*): maior, quàm *u*(*C*).
88. *b.* | *u*(*A*); *u*(*B*): altior, & maior, quàm *u*(*C*); *u*(*D*).
78. *b.* | *u*(*A*); *u*(*B*): logarithmus *e*.
78. *b.* | *u*(*C*); *u*(*D*): logarithmus *f*.
def.13 b | *u*(*C*): maior, quàm *u*(*D*).
8. 5. | *u*(*A*); *u*(*D*): maior, quàm *u*(*A*); *u*(*C*).

u(*A*);

104. b. $u(A)$; $u(C)$: non minor, quàm e; f.
104. b. e; f: non minor, quàm $u(B)$; $u(D)$.
8. 5. $u(B)$; $u(D)$: maior, quàm $u(B)$; $u(C)$.
13. 5. $u(A)$; $u(D)$; maior, quàm e; f.
13. 5. e; f: maior, quàm $u(B)$; $u(C)$.
12. b. $u(A)$; $u(D)$: D; A: d; a.
12. b. $u(B)$; $u(C)$: C; B: c; b.
13. 5. d; a: maior, quàm e; f.
13. 5. e; f: maior, quàm c; b.
91. b. df: maior, quàm ae.
91. b. eb: maior, quàm fc.

præpar. Et quoniam f, logarithmus eſt rationis C ad
80. b. D: ergo df, logarithmus eſt rationis C ad D totuplicatæ, quotus eſt d. item quoniam e, logarithmus eſt rationis A ad B: ergo ae, logarithmus eſt rationis A ad B totuplicatæ, quotus eſt a. Similiter fc, logarithmus eſt rationis C ad D totuplicatæ, quotus eſt c: & eb, logarithmus, ratio-
81. b. nis A ad B totuplicatæ, quotus eſt b. Sicut ergo ae, minor eſt, quàm df: ſic depreſſior eſt A ad B totuplicata, quotus eſt a, quàm C ad D totuplicata, quotus eſt d. Item ſicut eb, maior eſt, quàm fc: ſic A ad B totuplicata, quotus eſt b, altior eſt, quàm C ad D totuplicata, quotus eſt c.
hypoth. Sunt autem A ad B, & C ad D, minoris inæqua-
def. 1. & 24. litatis rationes, quarum depreſſior altiore maior eſt. Ergo A ad B totuplicata, quotus eſt a, maior

ior eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*: & *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*, minor, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*. Quod &c.

Demonſtr. 3.

Eſto *A* minor, quàm *B*, & maior, quàm *C*. Ergo *C*, *D*, *A*, *B*, ſunt quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitè; quarum *C*, minor, quàm *D*, & minor, quàm *A*. Et ratio *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*, maior eſt, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*. & *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*, minor, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*. Quod &c.

def. 5. *h.* *ſup.*

Demonſtr. 4.

Eſto *A*, maior, quàm *B*, & minor, quàm *C*. Ergo *B*, *A*, *D*, *C*, ſunt quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, quarum *B* minor, quàm *A*; & minor, quàm *D*. ideoque *B* ad *A* totuplicata ratio, quotus eſt *b*, maior eſt, quàm *D* ad *C* totuplicata, quotus eſt *c*: & *B* ad *A* totuplicata, quotus eſt *a*, minor, quàm *D* ad *C* totuplicata, quotus eſt *d*. Ergo conuertendo, *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*, minor eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*: & *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*, maior, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*. Quod &c.

def. 5. *h.* *ſup.* 2. 3.

Demonſtr. 5.

Eſto *A* maior, quàm *B*, & maior, quàm *C*. Ergo *D*,

C, *B*, *A*,

C, *B*, *A*, sunt quantitates arithmeticè dispositæ,
def.5.h. quarum *D* minor, quàm *C*, & minor, quàm *B*.
sup. quarum ratio *D* ad *C* totuplicata, quotus est *d*, maior est, quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus est *a*: & *D* ad *C* totuplicata, quotus est *c*, minor,
2.3. quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus est *b*: Ergo conuertendo, *C* ad *D* totuplicata, quotus est *d*, minor est, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *a*: & *C* ad *D* totuplicata, quotus est *c*, maior, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 93. Prop. 106.

SI fuerint quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, & prima minor secunda; fuerint autem & duo numeri prior ad posteriorem, minor, quàm vt prima quantitas ad quartam: erit primæ ad secundam totuplicata ratio, quotus est prior numerus, maior, quàm tertiæ ad quartam totuplicata, quotus est posterior.

Hypoth.

Sint quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, *A*, *B*, *C*, *D*: & sit *A*, minor, quàm *B*: ideoque etiam *C*, minor, quàm *D*: & sit *e* numerus ad numerum *f*, minor, quàm vt *A* ad *D*.

Dico *A* ad *B* totuplicatam, quotus est *e*, maiorem esse, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *f*.

Præ-

Præpar.

Denominetur u, per quantitates arithmeticè
13. *h.* dispositas A, B, C, D, vt fiant fractiones harmonicè dispositæ, $u(A)$, $u(B)$, $u(C)$, $u(D)$. Et esto rationis $u(A)$ ad $u(B)$, logarithmus g: & rationis $u(C)$ ad $u(D)$, logarithmus h.

Demonstr.

Vel $u(A)$, maior est, quàm $u(C)$; vel minor.
def.13*h.* Si $u(A)$, maior est, quàm $u(C)$: etiam $u(B)$, ma-
88. *h.* ior est, quàm $u(D)$: & $u(A)$ ad $u(B)$, ratio est al-
def.p.4. tior, & maior, quàm $u(C)$ ad $u(D)$. Ergo g ad h
104. *h.* non maior est, quàm vt $u(A)$ ad $u(C)$.
11. *h.* $u(A)$; $u(C)$: C; A.
12. *h.* C: maior, quàm A.
13. 5. g; h: non maior, quàm C; A.
8. 5. D; A: maior, quàm C; A.
13. 5. g; h: minor: quàm D; A.
2. 3. f; e: maior, quàm D; A.
13. 5. g; h: minor, quàm f; e.
91. *h.* ge: minor, quàm fh.

Est autem g logarithmus rationis $u(A)$ ad
12. *h.* $u(B)$, vel B ad A: ideoque ge, logarithmus est
80. *h.* rationis B ad A totuplicatæ, quotus est e. item fh, logarithmus est rationis D ad C totuplicatæ,
81. *h.* quotus est f. Ergo sicut ge, minor est, quàm fh: sic totuplicata ratio B ad A, quotus est e, depressior est, quàm totuplicata D ad C, quotus est f.

hypoth. | & est *B*, maior, quàm *A*, & *D* maior, quàm *C*:
def.p.4. | ergo totuplicata ratio *B* ad *A*, quotus est *e*, minor est, quàm totuplicata *D* ad *C*, quotus est *f*.
2. 3. | & conuertendo, totuplicata *A* ad *B*, quotus est *e*, maior, quàm totuplicata *C* ad *D*, quotus est *f*. Quod &c.

def.13.h | Si *u*(*A*), minor est, quàm *u*(*C*): etiam *u*(*B*), minor est, quàm *u*(*D*): & est ratio *u*(*C*) ad *u*(*D*), altior, quàm *u*(*A*) ad *u*(*B*): & est *u*(*C*), maior vtralibet *u*(*D*), & *u*(*A*).
88. *b.*
104. *h.* | *h*; *g*: non minor, quàm *u*(*C*); *u*(*A*).
12. *b.* | *u*(*C*); *u*(*A*): *A*; *C*.
13. 5. | *h*; *g*: non minor, quàm *A*; *C*.
8. 5. | *A*; *C*: maior, quàm *A*; *D*.
hypoth. | *A*; *D*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. | *h*; *g*: maior, quàm *e*; *f*.
91. *h.* | *hf*: maior, quàm *eg*.
sup. | Totuplicata *A* ad *B*, quotus est *e*, maior, quàm totuplicata *C* ad *D*, quotus est *f*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 94. Prop. 107.

SI fuerint quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, & prima, maior, quàm secunda: fuerint autem & duo numeri, prior ad posteriorem maior, quàm vt prima quantitas ad quartam: erit primæ ad secundam totuplicata ratio, quotus est prior numerus, maior, quàm tertię ad quartam

tam

tam totuplicata, quotus est posterior.

Hypoth.

Sint quatuor quantitates *A*, *B*, *C*, *D*, arithmeticè dispositæ: & sit *A*, maior, quàm *B*; ideoque etiam *C*, maior, quàm *D*: & sit *e* numerus ad numerum *f*, maior, quàm vt *A* ad *D*.

Dico *A* ad *B* totuplicatam, quotus est *e*, maiorem esse, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *f*.

Demonstr.

Sunt enim quatuor quantitates arithmeticè
hypoth. dispositæ *D*, *C*, *B*, *A*: & est *D* minor, quàm *C*:
2. 3. & *f* ad *e*, minor est, quàm vt *D* ad *A*. ergo *D*
106. b. ad *C* totuplicata ratio, quotus est *f*, maior est,
2. 3. quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus est *e*. Et conuertendo, *C* ad *D* totuplicata, quotus est *f*, minor, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *e*. Quod &c.

Quare &c.



Perilluft. & Excellentifs. D. Io. Dominico Caffino Aftronomo D.S. Petrus Mengolus S. D.



Vmquam mihi ſatis credo, Vir Excellentiſs. cum publicanda conſcribo; ideoque meritò nec omninò ſcholaribus credendum puto: quorum licet ope me fateor plurimùm profeciſſe; non tamen auctoritate oportuit confirmari. Tu verò, qui ſcis, & potes, tuis in me multis hucuſque poſitis, hoc addas officium velim: praua, ſi quæ ſunt, emendes primùm: in ijs, quæ malè poſita ſunt, conſilio adiuues; in cæteris, mihi duplices intellectum. Quod vt præſtes faciliùs, retexam breuiter huiuſce operis narrationem: quam cum legeris, præfationemque ad lectorem percurreris; plurima quidem curſim prætereundo intelligere; paucis verò difficilioribus lectis attentiùs, demonſtratisq;, poſsis de toto volumine ſententiam ferre.

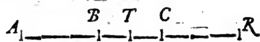
Ante annos duodecim, occaſione cuiuſdam problematis mihi propoſiti à D. Io. Antonio Rocca Regienſi, de figura vnilinea deſcribenda, quæ ſecaret ellipſim in duobus punctis innumerabiles eiuſmodi figuras excogitaui, quas tunc per Geometriam indiuiſibilium quadrabam, adhibito tamen prius hoc lemmate.

Lem-

Lemma.

Data recta linea, diuisa primùm bifariam, deinde non bifariam in duobus punctis, vtrimque à medio puncto æqualiter distantibus: assignatisque vnius eiusdem gradus potestatibus abscissarum, necnon alius eiusdem gradus potestatibus residuarum: inuenire cui sit æquale aggregatum ex duobus productis synonymis, sub potestatibus abscissarũ assignatis, per suarum assignatas potestates residuarum.

Est autem hoc lemma affine illi, quod recitat Bonauentura Cauallerius b. m. præceptor meus ex Io. Beugrand: quod idcircò in expositione placet imitari.



Sit recta *AR*, diuisa bifariam in *T*, & non bifariam in punctis *C*, *B*, æqualiter hinc inde à *T* distantibus. Oportet inuenire, cui sit æquale aggregatum productorum synonymorum sub potestatibus partium inæqualium *AB*, *BR*, & *AC*, *CR*. Vt autem breuiori via id obtineamus, procedemus per Algebram Speciosam, partes *AT*, *TR*, vocantes *t*: & partes *BT*, *TC*, vocantes *a*. Erunt ergo *AB*, *CR*, $t-a$: & erunt *AC*, *BR*, $t+a$. Assignatis itaque primis potestatibus abscissarum *AB*, *AC*, necnon primis residuarum *BR*, *CR*; volens inuenire cui æquetur summa productorum sub primis potestatibus *ABR*, *ACR*, statim ducendo $t-a$ per $t+a$ produco vnum: & ducendo

$$A \underline{\quad\quad} B \underline{\quad} T \underline{\quad} C \underline{\quad\quad\quad} R$$

do $t+a$ per $t-a$, produco alterum, quorum ſumma, $2t2 - 2a2$.

Exemplum primum in Vniprimis.

AB: $t-a$	AC: $t+a$
BR: $t+a$	CR: $t-a$
ABR: $t2-a2$	ACR: $t2-a2$
	$t2-a2$

$ABR+ACR$: $2t2-2a2$

Vnde ſequitur aggregatum productorum ſub primis poteſtatibus ABR, ACR, ęquale eſſe, duplæ ſecundæ poteſtati AT, dempta dupla ſecunda TC.

Quod ſi aſſignatis ſecundis poteſtatibus abſciſſarum AB, AC, & primis reſiduarum BR, CR, velim ſcire cui æquetur ſumma productorum ſub poteſtatibus ſecunda AB, & prima BR, & ſub ſecunda AC & prima CR: effingo ſecundam poteſtatem à radice $t-a$, quàm duco in primam $t+a$; vt fiat vnus productus: item effingo ſecundam $t+a$, quàm duco in primam $t-a$; vt fiat alter productus: quorum ſummam inuenio $2t3 - 2ta2$.

Exem-

Exemplum 2. in Biprimis.

AB: $t2 - 2ta + a2$

BR: $t + a$

$t3 - 2t2a + ta2$

$+ t2a - 2ta2 + a3$

ABR: $t3 - t2a - ta2 + a3$

AC: $t2 + 2ta + a2$

CR: $t - a$

$t3 + 2t2a + ta2$

$- t2a - 2ta2 - a3$

ACR: $t3 + t2a - ta2 - a3$

$t3 - t2a - ta2 + a3$

$ABR + ACR$: $2t3 - 2ta2.$

Vnde manifeſtum eſt aggregatum productorum ſub poteſtatibus, ſecunda *AB* & prima *BR*, & ſub ſecunda *AC* & prima *CR*, æquale eſſe duplæ poteſtati tertiæ *AT*, dempto duplo producto ſub prima *AT*, & ſecunda *TC*.

Similiter in cuiuslibet appellationis proportionalibus progrediendo, conſequemur optatum: vt exemplis ſubiectis liquidò apparet.

Exem-

A — B — T — C — R

Exemplum 3. in Triprimis.

AB: $t^3 - 3t^2a + 3ta^2 - a^3$
BR: $t + a$

$t^4 - 3t^3a + 3t^2a^2 - ta^3$
$+ t^3a - 3t^2a^2 + 3ta^3 - a^4$

ABR: $t^4 - 2t^3a + 2ta^3 - a^4$

AC: $t^3 + 3t^2a + 3ta^2 + a^3$
CR: $t - a$

$t^4 + 3t^3a + 3t^2a^2 + ta^3$
$- t^3a - 3t^2a^2 - 3ta^3 - a^4$

ACR: $t^4 + 2t^3a - 2ta^3 - a^4$
$t^4 - 2t^3a + 2ta^3 - a^4$

$ABR + ACR$: $2t^4 - 2a^4$.

Exemplum 4. in Bisecundis.

AB: $t^2 - 2ta + a^2$
BR: $t^2 + 2ta + a^2$

$t^4 - 2t^3a + t^2a^2$
$+ 2t^3a - 4t^2a^2 + 2ta^3$
$+ t^2a^2 - 2ta^3 + a^4$.

ABR: $t4 - 2t2a2 + a4$
Similiter ACR: $t4 - 2t2a2 + a4$
$ABR + ACR$: $2t4 - 4t2a2 + 2a4$.

Exemplum 5. in Quadriprimis.

AB: $t4 - 4t3a + 6t2a2 - 4ta3 + a4$
BR: $t + a$.

$t5 - 4t4a + 6t3a2 - 4t2a3 + ta4$
$+ t4a - 4t3a2 + 6t2a3 - 4ta4 + a5$

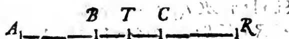
ABR: $t5 - 3t4a + 2t3a2 + 2t2a3 - 3ta4 + a5$

AC: $t4 + 4t3a + 6t2a2 + 4ta3 + a4$
CR: $t - a$

$t5 + 4t4a + 6t3a2 + 4t2a3 + ta4$
$- t4a - 4t3a2 - 6t2a3 - 4ta4 - a5$

ACR: $t5 + 3t4a + 2t3a2 - 2t2a3 - 3ta4 - a5$
$t5 - 3t4a + 2t3a2 + 2t2a3 - 3ta4 + a5$

$ABR + ACR$: $2t5 + 4t3a2 - 6ta4$.



Exemplum 6. in Trisecundis.

AB: $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$
BR: $t2 + 2ta + a2$

$t5 - 3t4a + 3t3a2 - t2a3$
$+ 2t4a - 6t3a2 + 6t2a3 - 2ta4$
$+ t3a2 - 3t2a3 + 3ta4 - a5$

ABR: $t5 - t4a - 2t3a2 + 2t2a3 + ta4 - a5$.

AC: $t3 + 3t2a + 3a2 + a3$
CR: $t2 - 2ta + a2$

$t5 + 3t4a + 3t3a2 + t2a3$
$- 2t4a - 6t3a2 - 6t2a3 - 2ta4$
$+ t3a2 + 3t2a3 + 3ta4 + a5$.

ACR: $t5 + t4a - 2t3a2 - 2t2a3 + ta4 + a5$
$t5 - t4a - 2t3a2 + 2t2a3 + ta4 - a5$

$ABR + ACR$: $2t5 - 4t3a2 + 2ta4$.

Similiter in Quintiprimis.

$ABR + ACR$: $2t6 + 10t4a2 - 20t2a4 - 2a6$.

In

In Quadrisecundis.

ABR+ACR: 2t6---2t4a2---2t2a4+2a6.

In Tritertijs.

ABR+ACR: 2t6---6t4a2+6t2a4---2a6.

In Sextiprimis.

ABR+ACR: 2t7+18t5a2---10t3a4---10ta6.

In Quintisecundis.

ABR+ACR: 2t7+2t5a2---10t3a4+8ta6.

In Quadritertijs.

ABR+ACR: 2t7---6t5a2+6t3a4---2ta6.

In Septimiprimis.

ABR+ACR: 2t8+28t6a2---28t2a6---2a8.

In Sextisecundis.

ABR+ACR: 2t8+8t6a2---30t4a4+8t2a6+2a8.

In Quintitertijs.

ABR+ACR: 2t8---4t6a2+4t2a6---2a8.

In Quadriquartis.

ABR+ACR: 2t8---8t6a2+12t4a4---8t2a6+2a8.

In Octauiprimis.

ABR+ACR: 2t9+40t7a2+28t5a4---56t3a6---14ta8.

In Septimisecundis.

ABR+ACR: 2t9+16t7a2---28t5a4+10ta8.

In Sextitertijs.

ABR+ACR: 2t9---12t5a4+16t3a6---6ta8.

In Quintiquartis.

ABR+ACR: 2t9---8t7a2+12t5a4---8t3a6+2ta8.



In Noniprimis.

$ABR + ACR$: $2t^{10} + 54t^8a^2 + 84t^6a^4 - 84t^4a^6 - 54t^2a^8 - 2a^{10}$.

In Octauisecundis.

$ABR + ACR$: $2t^{10} + 26t^8a^2 - 28t^6a^4 - 28t^4a^6 + 26t^2a^8 + 2a^{10}$.

In Septimitertijs.

$ABR + ACR$: $2t^{10} + 6t^8a^2 - 28t^6a^4 + 28t^4a^6 - 6t^2a^8 - 2a^{10}$.

In Sextiquartis.

$ABR + ACR$: $2t^{10} - 6t^8a^2 + 4t^6a^4 + 4t^4a^6 - 6t^2a^8 + 2a^{10}$.

In Quintiquintis.

$ABR + ACR$: $2t^{10} - 10t^8a^2 + 20t^6a^4 - 20t^4a^6 + 10t^2a^8 - 2a^{10}$.

Propositio.

In parallelogrammo ducta diametro, regula basi: omnes sexcuplæ vniprimæ sub triangulis, sunt æquales omnibus secundis potestatibus parallelogrammi.

Et omnes duodecuplæ biprimæ, omnibus tertijs potestatibus parallelogrammi.

Et omnes 20plæ triprimæ: necnon omnes 30plæ bisecundæ; omnibus quartis potestatibus.

Et

Et omnes 3oplæ quadriprimę: necnon omnes 6oplæ trisecundæ; omnibus quintis potestatibus.

Et omnes 42plę quintiprimę: item omnes 105 plę quadrisecundæ: & omnes 140oplæ tritertiæ; omnibus sextis potestatibus.

Et omnes 56plæ sextiprimæ: item omnes 168plę quintisecundæ: item omnes 28oplæ quadritertiæ; omnibus septimis potestat bus.

Et omnes 72plæ septimiprimæ: item omnes 252plæ sextisecundæ: necnon omnes 504plæ quintitertiæ: & omnes 63oplæ quadriquartæ; omnibus octauis potestatibus.

Et omnes 90plę octauiprimæ: & omnes 36oplæ septimisecundę: & omnes 84oplæ sextitertiæ: & omnes 126oplæ quintiquartæ; omnibus nonis potestatibus.

Et omnes 11oplæ noniprimæ: & omnes 495 plæ octauisecundæ: & omnes 132oplæ septimitertiæ: & omnes 231oplæ sextiquartæ: & omnes 2772plæ quintiquintæ; omnibus decimis potestatibus.

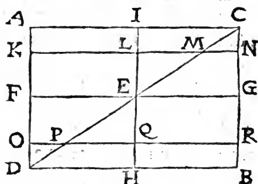
Et sic deinceps in infinitum iuxta numeros tabulę quadratricum, vel quadraturarum, cōtinuatę quātùm oportet.

Meth. Demonstr.

Affinis est hæc propositio, tribus propositionibus, quas loco citato refert Cauallerius ex eodem Beugrand *Exerc.* 4. *prop.* 25, 26, *&* 27: Eademque illarum methodo demonstrabitur, ex Lemmate præcedenti. Porrò satis puto ad ostensionem eiusdem methodi, ex decem propositis, tria tantùm demonstrare.

Hy-

Hypoth.



Esto parallelogrammum *AB*, cuius diameter *CD*: diuidaturque *CD* bifariam in *E*: ducanturque per *E*, rectæ *FG*, *IH*, parallelogrammi *AB* lateribus parallelę: ducanturque hinc inde ab *E* distantes quantumlibet, sed æqualiter, & intra quadratum, duæ *K L MN*, & *O P Q R*.

Dico sub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes sextuplas vniprimas, æquales esse, omnibus secundis potestatibus parallelogrammi *AB*.

Demonstr. p.

Quoniam aggregatum ex vniprimis *KMN*, *OPR*, est æquale duplæ secundę potestati *KL*, dempta dupla secunda potestate *LM*: & *KN* ducta est vtcunque. Ergo ex omnibus vniprimis, sub trapezio *AFEC*, & sub triangulo *CEG*, & ex omnibus, sub triangulo *EFD*, & sub trapezio *EDBG*, aggregatum; quod est omnes vnipri-

mæ

mæ sub triangulis *ACD*, *BCD*: est æquale omnibus duplis secundis potestatibus parallelogrammi *AE*, demptis omnibus duplis secundis potestatibus trianguli, *IEC*; idest omnibus simplis secundis potestatibus parallelogrammi *AH*, demptis omnibus secundis potestatibus, vtrorumq; triangulorum *IEC*, *DEH*.

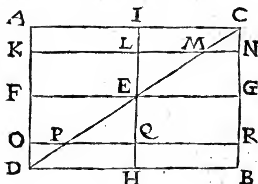
Sed qualium trianguli *IEC* omnes secundę potestates, sunt vnitas: talium parallelogrammi *AE*, sunt 3. Ideoq; qualium omnes secundæ potestates triangulorum *IEC*, *DEH*, sunt 2: talium omnes secundæ potestates parallelogrammi *AH*, sunt 6. Et omnes vniprimæ sub triangulis *ACD*, *BCD*, sunt vtrorumque differentia, nempe 4: & omnes sexcuplæ vniprimæ, sub triangulis *ACD*, *BCD*, sunt 24. Item qualium omnes secundæ potestates *AH*, sunt 6: talium omnes secundæ potestates *AB*, sunt 24. Ergo omnes sextuplæ vniprimę, sub triangulis *ACD*, *BCD*, sunt ęquales, omnibus secundis potestatibus *AB*. Quod &c.

Dico sub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes duodecuplas biprimas, æquales esse, omnibus tertijs potestatibus parallelogrammi *AB*.

Demonstr. 2.

Quoniam aggregatum ex biprimis *KMN*, *OPR*, est æquale duplæ tertiæ potestati *KL*, dempta dupla vnisecunda *KLM* (idest, dempto duplo producto sub potestatibus, prima *KL*, & secunda *LM*). Ostendetur similiter vt supra, quòd omnes biprimæ sub triangulis *ACD*, *BCD*,

sunt



ſunt æquales omnibus tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AH*, demptis omnibus vniſecundis ſub poteſtatibus primis eiuſdem *AH*, & ſub ſecundis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*.

Qualium autem omnes ſecundæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt vnitas: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi ſunt 3: ideoque qualium omnes vniſecundæ ſub parallelogrammo *AE*, & ſub triangulo *IEC*, ſunt ſunt vnitas: talium omnes tertiæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 3. & qualium omnes vniſecundæ ſub parallelogrammo *AH*, & ſub vtriſque triangulis *IEC*, *DEH*, ſunt 2: talium omnes tertiæ poteſtates *AH*, ſunt 6: & omnes biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt vtrorumque differentia, nempe 4: & omnes duodecuplę biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 48. item qualium omnes tertiæ poteſtates *AH*, ſunt 6: talium omnes ter-

tiæ

tiæ poteſtates *AB*, ſunt 48. Ergo omnes duodecuplæ biprimæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales omnibus tertijs poteſtatibus *AB*. Quod &c.

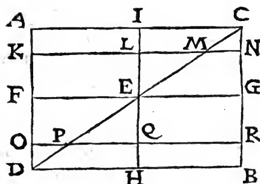
Dico ſub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes 6oplas triſecundas, æquales eſſe, omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AB*.

Demonſtr. 3.

Quoniam aggregatum ex triſecundis *KMN*, *OPR*, eſt æquale duplæ quintæ poteſtati *KL*, dempta quadrupla triſecunda *KLM*, addita dupla vniquarta *KLM*. oſtendetur ſimiliter vt ſupra, quod omnes triſecundæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AH*; demptis omnibus duplis triſecundis, ſub poteſtatibus tertijs *AH*, & ſub ſecundis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*, additis omnibus vniquartis ſub poteſtatibus primis *AH*, & ſub quartis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*.

Qualium autem omnes ſecundæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt 5: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 15. ideoque qualium omnes tr. ſecundæ ſub tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AE*, & ſub ſecundis trianguli *IEC*, ſunt 5: talium omnes quintæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 15: atque talium omnes duplæ triſecundæ ſub *AE*, & ſub *IEC*, ſunt 10: atque differentia vtrarumque, eſt 5.

Rurſum, qualium omnes quartæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt 3: talium omnes quartæ poteſtates *AE*, ſunt



15. ideoque qualium omnes vniquartæ, sub primis, *AE*, & quintis *IEC* potestatibus, sunt 3: talium omnes quintæ potestates *AE*, sunt 15. sed talium ostensæ sunt omnes quintæ *AE*, demptis omnibus duplis trisecundis, sub *AE*, & sub *IEC*, esse 5: ergo additis omnibus vniquartis, sub *AE*, & sub *IEC*, sunt 8.

Sed qualium omnes quintæ *AE*, sunt 15: talium omnes quintæ *AH* sunt 30: & omnes quintæ *AH*, demptis omnibus duplis trisecundis, sub *AH*, & sub vtrisque *IEC*, *DEH*, additisque omnibus vniquartis, sub *AH*, & sub vtrisque *IEC*, *DEH*, sunt 16; nempe omnes trisecundæ, sub triangulis *ACD*, *BCD*, sunt 16: & omnes 60plæ trisecundæ sub ijsdem, sunt 960. & qualium omnes quintæ potestates *AH*, sunt 30: talium omnes quintæ potestates *AB*, sunt 960. Ergo omnes 60plæ trisecundæ, sub triangulis *ACD*, *BCD*, sunt æquales, omnibus quintis potestatibus parallelogrammi *AB*. Quod &c. Quare &c.

His

His demonstratis, cogitabam si possent aliæ quadraturæ inueniri ex inuentis compositæ, in quas insignis aliqua resoluatur; quemadmodum in triangula, parabolam Archimedes resoluit. Et quæsiui primum de omnibus figuris, in quibus ordinatæ ad basim, sunt omnes potestates abscissarum, primæ, secundæ, tertiæ, & deinceps in infinitum: quas ex demonstratis à Cauallerio loco citato, deprehendebam esse in serie harmonica naturali ab vnitate: earumque summam demonstraui excrescere in infinitum, in præfatione ad meum libellum, cui titulus, Nouæ Quadraturæ Arithmeticæ, seu de Additione Fractorum.

Deinde tentaui, si possent in vnam colligi summam figuræ, in quibus ordinatæ ad basim, sunt abscissæ primæ, & producti sub primis abscisis, & residuarum potestatibus omnifariam, idest, abscissæ primæ, vniprimæ, vnisecundæ, vnitertiæ, vniquartæ, & deinceps in infinitum: quas colligere mihi successit fæliciter, & æquales inuenire parallelogrammo, cuius ad eamdem basim ordinatæ, sunt omnes totæ; vt potest facilè colligi ex supra demonstratis, & ex 17. p. Nou. Quadr.

Item si possent colligi figuræ, in quibus ordinatæ ad basim sunt abscissæ secundæ, & producti sub abscisis secundis, & residuarum potestatibus omnifariam, idest, abscissæ secundæ, biprimæ, bisecundæ, bitertiæ, biquartæ, & deinceps in infinitum: quas etiam colligere mihi successit, & æquales inuenire triangulo, cuius ordinatæ sunt omnes obscissæ. vt patet ex supra demonstratis, & ex 8.2. Nou. Quadr.

Et generaliter inueni, figuram, in qua ordinatæ sunt omnes potestates abscissarum, & deinceps omnes figuras, in quibus ordi-

natæ sunt productæ sub ijsdem potestatibus abscissarum, & sub residuarum potestatibus omnifariam, simul aggregatas, æquales esse figuræ, in qua ordinatæ, sunt omnes potestates abscissarum ordinis proximè inferioris. Verbi gratia, omnes abscissas tertias, additis omnibus triprimis, omnibus trisecundis, omnibus tritertijs, alijsque omnibus triquotis; esse æquales, omnibus abscisis secundis. Item omnes abscissas quartas, additis omnibus quadriprimis, omnibus quadrisecundis, omnibus quadritertijs, omnibus quadriquartis, alijsque omnibus quadriquotis; esse æquales omnibus abscisis tertijs, quod ita generaliter vt enunciatum est, & ex supra demonstratis, & ex 5. 3. Nou. Quadr. potest manifestari.

Ipsam interim accessionem, quam Geometriæ Indiuisibilium feceram, præteriui: veritus eorum authoritatem, qui falsum putant suppositum, omnes rectas figuræ planæ infinitas, ipsam esse figuram planam: non quasi hanc sequens partem; sed illam quasi non prorsus indubiam deuitans: tentandi animo, si possem demum eamdem indiuisibilium methodum, aut aliam æquiualentem nouis, & indubijs prorsus constituere fundamentis.

Mechanicis deinde ac Musicis hucusque imperfectis occupatis lucubrationibus, in eas quandoque veni demonstrandarū conclusionum angustias, vt per omnifariam hæc nostra elementa, nouorum indigerem argumentorum. quæ priuatis tradita scriptis delitescebant, non inculta solùm, sed & ita perperam posita, vt quasi specialia Lemmata quorumdam mathematum, non valerent ad aliud. Animaduertebam etiam me non posse multùm in Mechanicis proficere, quas liberaliter profiteor; nisi ex vberiore

Geo-

Geometria, quàm quæ hucusque ab Euclide, Apollonio, alijsque posterioribus tradita esset.

Nuperrimè hoc anno, Adm. R. P. Fr. Stephanus de Angelis Iesuattus, meus condiscipulus, de indiuisibilium Præceptoris nostri Geometria omnium optimè meritus, cuius intellectus copiam, & fælicitatem, nunquam satis à me cõmendari posse verbis existimo, mittebat ad me libellum suum De Infinitis Parabolis &c. legendum: cuius ex eruditione mirabili, melior, & vegetior factus Geometra; maximum hoc emolumentum percepi: vt præterita studia reuerterentur in mentem; ordinemque, inter plura deinceps inuenta, postularent. & illud tandem mihi, opinor, successisse fæliciter, quod duodecim ante annos desideraueram: ijs etiam, quibus deuincior, Mechanicorum studiorum obligationibus oportunum. super qua mea opinione, Vir Excellentissime, hisce lucubrationibus perlectis; & quatenus oportuerit ad correctionem notatis: tuam sinceram enixè rogans, postulo, & expecto sententiam. Vale.



Tabula Formosa.

FO.u.
FO.a. FO.r.
FO.a2. FO.ar. FO.r2.
FO.a3. FO.a2r. FO.ar2. FO.r3.
FO.a4. FO.a3r. FO.a2r2. FO.ar3. FO.r4.

Tabula Subquadraturarum.

FO.u.
FO.a. FO.r.
FO.a2. FO.2ar. FO.r2.
FO.a3. FO.3a2r. FO.3ar2. FO.r3.
FO.a4. FO.4a3r. FO.6a2r2. FO.4ar3. FO.r4.

Tabula Quadraturarum.

FO.u.
FO.2a. FO.2r.
FO.3a2. FO.6ar. FO.3r2.
FO.4a3. FO.12a2r. FO.12ar2. FO.4r3.
FO.5a4. FO.20a3r. FO.30a2r2. FO.20ar3. FO.5r4.

GEO-

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.



1 ASsumatur inter lineas, vna quælibet quantitas; quæ, Rationalis, dicetur.

2 Et exponatur quædam recta linea, rationali æqualis; quæ dicetur, Tota:

3. Sitque data positione; quæ dicetur, Basis.

4. Eiusque alterum extremorum punctorum, dicetur, Finis abscissarum.

5. Alterum, Finis residuarum.

6. Et ab vnoquoque puncto in basi sumpto, vsque ad finem abscissarum, quatenus ipsa basis extenditur, quantitas dicetur Abscissa.

7. Ideoque tota dicetur etiam, Maxima abscissarum.

8. Item ab vnoquoque puncto in basi sumpto, vsque ad finem residuarum, quatenus basis extenditur, quantitas dicetur Residua.

9. Ideo-

9. Ideoque tota dicetur etiam, Maxima residuarum.

10. Super basi describatur quadratum: & ab vno quolibet puncto in basi sumpto, recta ducatur, vsque ad oppositum latus, reliquis lateribus quadrati parallela: quæ dicetur, Ordinata in quadrato.

11. Quæ cum sit æqualis rationali, & totę; dicetur Rationalis, & Tota, & Maxima abscissarum, & Maxima residuarum.

12. Et quadratum, per suas ordinatas extensum, dicetur, Forma omnes rationales, & Forma omnes totæ. & significabitur characteribus *FO.u*, & *FO.t*.

13. Immò quoniam tota est æqualis rationali, & reliquæ omnes potestates totę, sunt inter se, & rationali æquales: ordinata in quadrato dicetur etiam, Tota secunda, Tota tertia, Tota quarta, & deinceps.

14. Et quadratum, dicetur, Forma omnes totæ secundæ, Forma omnes totæ tertiæ, Forma omnes totæ quartę. aptisque significabitur characteribus, *FO.t2*, *FO.t3*, *FO.t4*. & sic deinceps.

15. A fine abscissarum ducta diameter quadrati, facit semiquadratum triangulum: cuius ab vnoquolibet puncto in basi sumpto recta ducatur, vsque ad prædictam diametrum, alteri lateri parallela, quæ dicetur, Ordinata in triangulo.

16. Quæ cum sit æqualis abscissæ, dicetur, Abscissa.

17. Ipsumque triangulum per suas ordinatas extensum, dicetur, Forma omnes abscissæ. & significabitur charactere, *FO.a*.

18. Si-

18. Similiter à fine residuarum ducta diameter quadrati, facit semiquadratum triangulum: cuius vnaquælibet ordinata, cum sit æqualis residuæ, dicetur Residua.

19. Et per ordinatas residuas extensum triangulum, dicetur, Forma omnes residuæ. & significabitur charactere, *FO.r.*

20. Si super basi concipiatur figura extensa non nisi per ordinatas in quadrato: sed in qua, vnaquælibet ordinata, est abscissa secunda, dicetur, Forma omnes abscissæ secundæ. & significabitur charactere *FO.a2.*

21. Item, in qua, vnaquælibet ordinata, est vniprima, dicetur, Forma omnes vniprimæ. & significabitur charactere, *FO.ar.*

22. Et in qua, vnaquælibet ordinata, est residua secunda, dicetur Forma omnes residuæ secundæ. & significabitur charactere, *FO.r2.*

23. Et generaliter, si super basi concipiatur figura, extensa non nisi per ordinatas in quadrato: & in qua, vnaquælibet ordinata, est assumpta quædam in tabula proportionalium: dicetur, Forma omnes tales proportionales. aptoque significabitur charactere. vt Forma omnes abscissæ tertiæ, *FO.a3*: Forma omnes biprimę, *FO.a2r*: Forma omnes vnisecundæ, *FO.ar2*: Forma omnes residuæ tertiæ, *FO.r3*. & sic deinceps.

24. Itaque ad instar tabulæ proportionalium, & specierum, alia tabula ordinabitur formarum, quæ dicetur, Formosa.

25. Quod si vna quælibet ordinata in forma, est assumpta quædam in tabula nominum: dicetur, Forma omnes totuplæ tales proportionales, aptoque significabitur charactere. vt, Forma omnes duplæ vniprimæ, *FO.2ar*: Forma omnes triplæ biprimæ, *FO.3a2r*: Forma omnes triplæ vnisecundæ, *FO.3ar2*. & sic deinceps.

26. Ideoque ad instar tabulæ nominum, & subquadratricum, alia tabula ordinabitur, quæ dicetur, Tabula subquadraturarum.

27. In qua digestæ formæ, dicentur, Subquadraturæ.

28. Item ad instar tabulæ quadratricum, alia tabula ordinabitur, quæ dicetur, Tabula Quadraturarum.

29. In qua digestæ formæ, dicentur, Quadraturæ.

30. Denique si vnaquælibt ordinata, in forma, est assumptæ proportionalis multipla, vel submultipla, vel multiplæ submultipla: dicetur, Forma omnes totuplæ] tales proportionales, vel subtotuplæ, vel totuplarum subtotuplæ. aptisque significabitur characteribus. vt Forma omnes quintuplæ bitertiæ, *FO.5a2r3*: & Forma omnes biprimę subtriplæ, *FO.a2r(3)*: & Forma omnes quadruplæ triquartæ subseptulæ, *FO.4a3r4(7)*. & sic deinceps.

31. Si basis diuisa fuerit in partes æquales; ductæque fuerint per extrema & media diuisionum puncta parallelæ ordinatæ in forma; & super partibus basis æqualibus, inter parallelas completa fuerint parallelogramma maxima intra formam iacentia: figura ex parallelogrammis composita, dicetur, Inscripta formæ.

32. Quod

32. Quod si completa fuerint parallelogramma minima formam includentia: figura ex parallelogrammis composita, dicetur, Circumscripta formæ.

33. Figura vero ex tot parallelogrammis, quot sunt ordinatæ per puncta diuisionum, & ad ipsas ordinatas iacentibus composita, dicetur, Adscripta formę.

34. Speciosa, & Formosa tabulis congruentibus, Massæ, & Formæ, quarum in vtrisque sunt eędem appellationes, & ijdem characteres, dicentur inuicem Homonymę.

35. Item Homonymarum æquemultiplices, dicentur Homonymæ.

36. Ideoque etiam in duabus subquadratricum, & subquadraturarum, aut quadratricum, & quadraturarum tabulis, Massæ, & Formæ, dicentur Homonymę.



Theor. 1. *Prop.* 1.

TAbulæ formosæ primi lateris, in tertia, quarta, & reliquis deinceps formis, in singulis ordinatæ, pro maioribus abscissis, sunt maiores; & pro maxima abscissarum, est maxima, & ipsi basi æqualis: item vltimi lateris in formis, pro maioribus residuis, sunt maiores; & pro maxima residuarum, est maxima, & ipsi basi æqualis.

Hypoth.



Esto basis *AR*: in qua finis abscissarum, *A*; finis residuarum, *R*. & sint abscissæ, *AB* minor, *AC* maior, *AR* maxima; & residuæ, *RC* minor, *AB* maior, *RA* maxima: & esto in primo latere tabulæ formosæ, tertia *FO.a2*; & in vltimo, tertia *FO.r2*.

Dico in *FO.a2*, ordinatam per *C*, maiorem esse ordinata per *B*: & per *R*, maximam esse ordinatarum, & æqualem ipsi *AR*.

Item in *FO.r2*, ordinatam per *B*, maiorem esse ordinata per *C*: & per *A*, maximam esse ordinatarum, & æqualem ipsi *RA*.

Demonstr.

def.20b Basis *RA*, ad ordinatam per *B*, duplicatam habet rationem eius, quàm habet ad *AB*: & ad ordinatam per *C*, duplicatam eius, quàm habet ad *AC*:

AC: & ad ordinatam per R, duplicatam æqualitatis, quàm habet ad AR. Sed RA ad AB, maior eſt, quàm vt ad AC: & ad AC, maior, quàm
4. 3. vt æqualis ad AR. Ergo ad ordinatam per B, maior eſt, quàm vt ad ordinatam per C: & ad ordinatam per C, maior, quàm vt ad ordinatam per R. Ergo ordinata per B, minor eſt, quàm quæ per C: & vtralibet per B, & per C, minor, quàm quæ per R: & ordinata per R, eſt maxima; ad quàm RA duplicatam habet rationem æqualitatis, nempe eamdem habet æqualitatis rationem: ergo per R ordinata, eſt ipſi AR æqualis. Quæ &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur, quòd in FO.r2, ordinata per B, maior eſt, quàm quæ per C: & vtralibet per B, & per C, minor, quàm quæ per A: & per A ordinata eſt maxima, & ipſi AR æqualis. Quę &c.

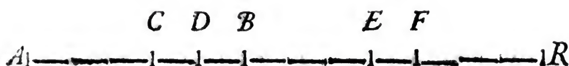
Quare &c.

Theor. 2. Prop. 2.

IN ſingulis formoſæ tabulę, non primi, nec vltimi lateris formis, ordinatarum maxima, minor eſt, quàm tota: & facit abſciſſam, & reſiduam, proportionales, vt numeri, à quibus ipſa forma denominatur: reliquarum verò ex vtralibet parte, propior maximę remotiore maior eſt.

Hy-

Hypoth.



Esto basis *AR*; in qua, finis abscissarum, *A*; finis residuarum *R*: & esto in tabula formosa, non in primo, nec in vltimo latere, forma omnes bitertiæ, quàm denominant numeri 2, 3, cuius character, *FO.a2r3*. & diuidatur *AR* in *B*, vt abscissa *AB*, ad residuam *BR* sit proportionalis, sicut 2 ad 3: sumanturque aliæ abscissæ minores, quàm *BA*, nempe *DA*, *CA*: & aliæ residuæ minores, quàm *BR*, nempe *ER*, *FR*.

Dico in *FO.a2r3*, ordinatam per *B* minorem esse, quàm *AR*; & ordinatarum esse maximam: & ordinatam per *D*, maiorem esse, quàm quæ per *C*: & ordinatam per *E*, maiorem, quàm quæ per *F*.

Demonstr.

6. p. Rationalis *u*, ad *a2r3*, rationem habet compo-
def.8.p. sitam ex rationibus, *u* ad *a2*, & *u* ad *r3*: idest compositam ex duplicata *u* ad *a*, & ex triplicata *u* ad *r*. Est autem *AR* ad *AB*, vt *u* ad *a*: & *AR* ad *BR*, vt *u* ad *r*: & ad ordinatam per *B*, est vt *u* ad *a2r3*. Ergo *AR* ad ordinatam per *B*, habet rationem compositam ex rationibus, duplicata *AR* ad *AB*, atque triplicata *AR* ad *RB*. Sed *AR* ad *AB*, & *AR* ad *RB*, sunt maioris inęqualitatis

litatis rationes, quæ tùm multiplicatæ, tùm compositæ, faciunt maioris inæqualitatis rationem. Quare *AR* maior est, quàm ordinata per *B*. Quod &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur, quod ordinata per *D* ad *AR*, habet rationem compoſitam ex duplicata *AD* ad *AR*, & ex triplicata
p. p. *DR* ad *AR*. Ergo ex æquali, ordinata per *D* ad ordinatam per *B*, rationem habet compoſitam ex duplicata *DA* ad *AB*, & ex triplicata *DR* ad
def. 5. 5. *RB*. Sunt autem *DA*, *AB*, *BR*, *RD*, quatuor arithmeticè diſpoſitæ, quarum ſecunda *AB* ad
105. 5. tertiam *BR* eſt vt 2 ad 3. Ergo duplicata ratio *DA* ad *AB* minor eſt, quàm triplicata *BR* ad
3. p. *RD*. Habet autem ſecunda poteſtas *DA* ad ſecundam *AB* duplicatam rationem eius, quàm habet *DA* ad *AB*: & tertia poteſtas *BR* ad tertiam *RD* triplicatam *BR* ad *RD*. Ergo ſecunda poteſtas *DA* ad ſecundam *AB* minor eſt, quàm vt
91. 5. tertia poteſtas *BR* ad tertiam *RD*: ergo productus ſub ſecunda poteſtate *AD*, & ſub tertia *DR*, minor eſt producto, ſub ſecunda *AB*, & ſub tertia
8. 5. *BR*. Sed productus ſub ſecunda poteſtate *AD*, & ſub tertia *DR*, ad productum ſub ſecunda *AB*, & ſub tertia *BR*, compoſitam habet ex rationibus ſecundæ poteſtatis *AD* ad ſecundam *AB*, & tertiæ *DR* ad tertiam *BR*: nempe compoſitam ex duplicata *AD* ad *AB*, & triplicata *DR* ad *RB*:



RB: nempe eamdem quàm ordinata per *D* ad ordinatam per *B*. Ergo ordinata per *D*, minor eſt quàm ordinata per *B*. Similiter oſtendetur, quòd & ordinatæ per *E*, per *C*, per *F*, ſingulæ ſunt minores, quàm ordinata per *B*. Ergo ordinata per *B* eſt maxima. Quod &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur, quod ordinata per *C* ad ordinatam per *D*, eſt vt productus ſub ſecunda poteſtate *AC*, & ſub tertia *CR*, ad productum ſub ſecunda *AD*, & ſub tertia *DR*: & quod rationem habet compoſitam ex rationibus, duplicata *CA* ad *AD*, & triplicata *CR* ad *RD*. Sunt autem *DA*, *AC*, *CR*, *RD*, quatuor arithmeticè diſpoſitæ quarum *DA* maior eſt, quàm *AC*: & ſunt duo numeri 2 ad 3, vt *AB* ad *BR*, maiorem ſcilicet rationem habentes, quàm
107. 5. *AD* ad *DR*. Ergo maior eſt *DA* ad *AC* dupli-
2. 3. cata ratio, quàm *CR* ad *RD* triplicata: & è conuerſo minor eſt *CA* ad *AD* duplicata, quàm
3. p. *DR* ad *RC* triplicata: & minor eſt ſecunda poteſtas *CA* ad ſecundam *AD*, quàm vt poteſtas ter-
91. 5. tia *DR* ad tertiam *RC*: & minor eſt productus ſub ſecunda poteſtate *AC*, & ſub tertia *CR*, quàm ſub ſecunda poteſtate *AD*, & ſub tertia *DR*: &

minor

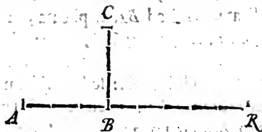
minor est ordinata per *C*, quàm ordinata per *D*. Similiter ostendetur, quòd ordinata per *F*, minor est, quàm ordinata per *E*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 1. Prop. 3.

FOrmæ propositæ, in data basi, per datum punctum, ordinatam inuenire.

Hypoth.



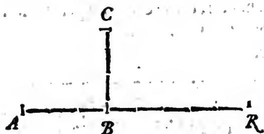
Esto proposita *FO.10a2r3*, super data basi *AR*, in qua datum punctum *B*.

Oportet per *B* ordinatam inuenire.

Constr.

Data *AR*, datisque *AB*, *BR*, inueniatur recta *BC*, ad quàm *AR*, rationem habet compositam ex datis rationibus, *AR* ad *AB* duplicata, *AR* ad *BR* triplicata, & ex ratione subdecupla: & collocetur *BC* perpendiculariter ad *AR*.

Dico *BC*, esse ordinatam per *B*, in *FO.10a2r3*.



Demonstr.

Ratio *AR* ad *BC*, componitur ex rationibus *AR* ad *AB* duplicata, *AR* ad *BR* triplicata, & ex ſubdecupla: ſed *AR*, eſt *u*; *AB*, eſt *a*; *BR*, eſt *r*: Ergo *AR* ad *BC* ratio, componitur ex rationibus *u* ad *a* duplicata, *u* ad *r* triplicata, & ex ſubdecupla: ſed ex ijſdem componitur *u* ad 10*a*2*r*3: ergo *AR* ad *BC* eſt vt *u* ad 10*a*2*r*3: Sed *AR* eſt *u*: ergo *BC*, eſt 10*a*2*r*3: ergo *BC* eſt ordinata per *B*, in *FO*.10*a*2*r*3. Quod &c.

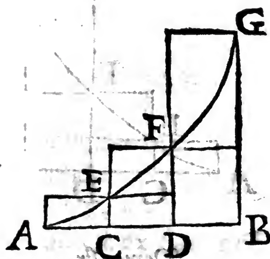
Quare &c.

Probl. 2. Prop. 4.

SVper data baſi propoſitæ formæ primi vel vltimi lateris, per datum numerum diuiſa in partes æquales, tres figuras ex parallelogrammis deſcribere, inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam: & oſtendere, quòd inſcripta & adſcripta ſunt æquales: & quòd circumſcripta excedit inſcriptam quantitate rectanguli ſub maxima ordinata, & ſub vna æqualium baſis partium.

Hy-

Hypoth.



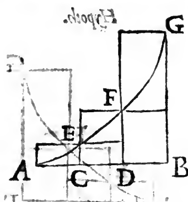
Esto propositæ formæ data basis *AB*, diuisa in datas partes æquales *AC*, *CD*, *DB*.

Oportet describere inscriptam, circumscriptam, & adscriptam.

Constr.

p. h. 3. h. | Assumatur alterum extremorum *A*, *B*, nempe *B*, per quod ordinata est maxima: & inueniantur ordinatæ per data puncta *C*, *D*, *B*, rectæ *CE*, *DF*, *BG*: & compleantur parallelogramma *ED*, *FB*, *AE*, *CF*, *DG*.

Dico inscriptam esse ex *DE*, *BF*: circumscriptam, ex *AE*, *CF*, *DG*: adscriptam, ex *AE*, *CF*, vel ex *DE*, *BF*: & adscriptam inscriptæ æqualem esse: & circumscriptam excedere inscriptam quantitate rectanguli *DG*.



Demonstr.

p. h. Ordinatarum per omnia *BD* puncta, maxima est per *B*, minima per *D*: ergo parallelogrammorum inter ordinatas per *D*, & *B*, intra propositam formam iacentium, maximum est *BF*; & includentium formam, minimum est *DG*; excedit autem *DG*, ipsum *FB*, spatio *FG*. Similiter ostendetur, parallelogrammum inter ordinatas per *C*, & *D*, infra propositam formam iacentium, maximum esse *DE*; & includentium formam, minimum esse *CF*: excedit autem *CF*, ipsum *DE*,

p. h. spatio *EF*. Item quoniam *CE*, maxima est ordinatarum per omnia *AC* puncta; per *A* verò nulla est ordinata: ergo parallelogammorum, inter ordinatam per *C*, & eius parallelam per *A*, includentium formam, minimum est *AE*; nullum verò

def. 31 h est, intra formam iacentium. Ergo inscripta est,

ex

def.32b ex DE, BF composita: & circumscripta, ex AE, EF, DG composita: & excedit circumscripta inscriptam spatio ex AE, EF, FG parallelogrammis composito. Sed ex AE, EF, FG compositum spatium parallelogrammo DG est æquale. ergo excedit circumscripta inscriptam quantitate DG. Et quoniam CE, DF, sunt ordinatę per diuisionum puncta C, D quibus totidem adiacent parallelogramma, vel AE, CF, vel DE, BF.
def.33b Ergo adscripta est ex DE, BF, vel ex AE, CF. sunt autem AE, CF, ipsis DE, BF æqualia, ex quibus componitur inscripta. Ergo adscripta est æqualis inscriptæ. Quæ &c.

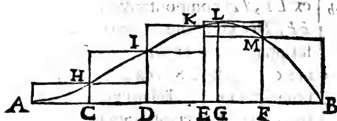
Quare &c.

Probl. 3. Prop. 5.

SVper data basi propositæ formæ non primi neque vltimi lateris, per datum numerum diuisa in partes ęquales; tres figuras ex parallelogrammis describere, inscriptam, circumscriptam, & adscriptam: & ostendere, quod circumscripta excedit adscriptam, quantitate rectanguli sub maxima ordinatarum, & sub vna æqualium basis partium: & quod adscripta excedit inscriptam, non maiori quantitate.

Hypoth.

Esto propositæ formæ data basis AB, diuisa in datas partes æquales AC, CD, DE, EF, FB: & esto A, finis abscissarum; & B, finis residuarum. Opor-



Oportet describere inscriptam, circumscriptam, & adscriptam.

Constr.

Assumantur numeri denominantes formam propositam, secundum quos diuidatur *AB* in partes proportionales in *G*, vt abscissa *AG*, ad residuam *GB*, sic se habeat, sicut denominantium numerorum prior ad posteriorem. Constat per
2. *b.*
3. *b.* *G* punctum, esse maximam ordinatam. Inueniantur per *C*, *D*, *E*, *G*, *F*, ordinatæ *CH*, *DI*, *EK*, *GL*, *FM*; & esto *MF*, minor, quàm *EK*: & compleantur parallelogramma *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*, *HD*, *IE*, *EM*, *KF*.

Dico inscriptam esse ex *HD*, *IE*, *EM*: circumscriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*: adscriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel ex *HD*, *IE*, *KF*, *MB*: & circumscriptam excedere adscriptam, quantitate rectanguli *ELF*: & adscriptam excedere inscriptam non maiori, quàm rectanguli *ELF* quantitate.

De-

Demonstr.

2. h. Ordinatarum per omnia *BF* puncta, maxima est per *F*, nulla per *B*: ergo inter ordinatam per *F*, & parallelam per *B*, minimum parallelogrammorum includentium formam est *MB*, ideoque ad circumscriptam pertinens figuram: nullum verò est intra formam iacentium. Item ordinatarum per omnia *EF* puncta maxima est per *G*; & per *F*, minor, quàm quæ per *E*, est minima: & inter ordinatas *EK*, *FM* minimum parallelogrammorum includentium formam, est *ELF*, & intra formam iacentium maximum *EM*; ideoque ad circumscriptam pertinet *ELF*; ad inscriptam verò *EM*. Similiter ostendetur, quod *DK*, *CI*, *AH* pertinent ad circumscriptam; & *HD*, *IE* ad inscriptam. Quare inscripta est ex *HD*, *IE*, *EM*: & circumscripta *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*. Et quoniam *CH*, *DI*, *EK*, *FM* sunt ordinatæ, quibus adiacent parallelogramma *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel *HD*, *IE*, *KF*, *MB*: manifestum est adscriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel ex *HD*, *IE*, *KF*, *MB* compositam esse. Excedit autem circumscripta adscriptam spatijs, *AH*, *HI*, *IK*, & excessu *ELF*, supra *KF*; vel spatijs *KLM*, *MB*: quæ vtralibet sunt æqualia vni rectangulo *ELF*: excedit ergo circumscripta adscriptam, quantitate rectanguli *ELF*. Adscripta vero excedit inscriptam

def.32b

def.31b

def.33b

spa-

ſpatijs AH, HI, IK; vel ſpatijs KM, MB: quæ vtralibet non maiora ſunt rectangulo ELF: excedit ergo adſcripta inſcriptam, non maiori quantitate, quàm ſit ELF. Quę &c. Quare &c.

Probl. 4. Prop. 6.

INuenire numerum, per quem propoſitæ formæ data baſis diuidatur, vt circumſcripta, & inſcripta ſint propiores æqualitati, quàm in data ratione inæqualitatis.

Hypoth.

Eſto data baſis B, dataque ratio maioris inæqualitatis c ad d.

Oportet numerum inuenire, per quem cum diuiſa fuerit B, & figuræ circumſcripta & inſcripta deſcriptæ fuerint, circumſcripta ad inſcriptam, minor ſit, quàm vt c ad d.

Conſtr.

Aſſumatur quilibet numerus, per quem diui-
5. h. datur B: & inſcripta deſcribatur figura E: & in-
ueniatur quantitas F, ad quàm E, maior eſt,
2. h. quàm vt c ad c---d. Aſſignetur etiam, in ipſa B,
3. h. punctum: per quod maxima ordinatarum inue-
niatur G: & ad G applicetur quantitas F, vt fiat
latitudo H: & ſumatur ipſius H multiplex L, maior quàm dupla B: & quotuplex eſt L ad H, totus numerus eſto M.

Dico M, eſſe numerum, per quem, cum diuiſa fuerit B; & figuræ circumſcripta, & inſcripta, fuerint deſcriptæ: cir-

circumscripta ad inscriptam minor est, quàm vt c ad d.

Præpar.

Quotus est M, tota pars ipsius B accipiatur
5. h. N. & diuisa basi per numerum M, fit inscripta
figura Q, circumscripta R, adscripta S.

Demonstr.

2. p. Quoniam B ad N; est vt M ad vnitatem, vel
vt L ad H: permutando B ad L, est vt N ad
f. p. H: & $2B$ ad L, vt $2N$ ad H. Sed $2B$, minor
est, quàm L: ergo $2N$, minor est, quàm H: ergo $2GN$ rectangulum, minus est rectangulo GH.
sed rectangulum GH, est æquale ipsi spatio F: ergo $2GN$, minus est, quàm F. Et est E ad $2GN$,
ratio maior, quàm E ad F. Sed E ad F ratio,
maior est, quàm c ad $c-d$: ergo E ad $2GN$
ratio, maior est, quàm c ad $c-d$. Est autem R, maior, quàm E: ergo R ad $2GN$ ratio, maior est,
5. h. quàm c ad $c-d$. Est autem $R-S$, æqualis ipsi
GN: & $S-Q$, non maior est, quàm $2GN$: ergo R ad $R-Q$, maior est, quàm c ad $c-d$:
3. 3. ergo, per conuersionem rationis, R ad Q, minor est, quàm vt c ad d. Ergo M est numerus
per quem &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 7.

ADscripta, & forma, sunt quasi æquales.

Demonstr.

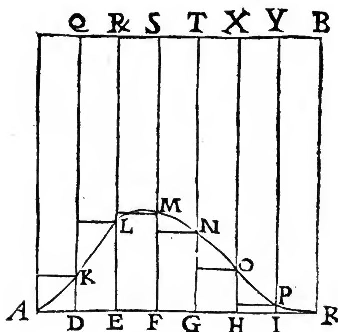
Nam data qualibet inæqualitatis ratione, possunt inueniri, circumscripta formæ, & inscripta,
6. h. propiores æqualitati: est autem vtralibet adscripta,
5. h. & forma, minor, quàm circumscripta, & maior, quàm inscripta: ergo potest inueniri adscripta ad
67. 5. formam propior æqualitati, quàm in data qualibet inæqualitatis ratione. Quare adscripta, & forma,
def. 3. 3. sunt quasi æquales.

Theor. 4. *Prop.* 8.

ADscripta cuiusque formæ, ad formam in vertice formosæ tabulæ, est vt à radice numero partium basis, massa homonyma, ad totam vnitate plus ordinatã, quàm sit basis tabulæ speciosæ, ad quam pertinet massa.

Hypoth.

Sunto duæ formæ, vna in vertice formosæ
def. 12 b. *FO.u*, quæ est quadratum *AB*; altera *FO.1042r3*, super eadem basi *AR*: in qua finis absciffarum *A*; finis residuarum *R*. Et esto *AR* diuisa in partes æquales, mediãtibus pũctis *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*: per quæ ordinatæ sint, in altera forma, rectæ *DK*, *EL*, *FM*, *GN*, *HO*, *IP*; & in quadrato, sint *DQ*, *ER*, *FS*, *GT*, *HX*, *IY*. & sint *AK*, *DL*, *EM*, *FN*, *GO*, *HP* parallelogramma, ex quibus componitur adscripta, quæ vocetur *S*: & *AQ*, *DR*, *ES*, *FT*, *GX*, *HY*, *IB* parallelogramma æqualia, in quæ diuiditur



uiditur quadratum *AB*. Assumatur etiam numerus *t*, partium æqualium ipsius *AR*: & à radice *t*, massa *O.10a2r3*, quæ ad quintam basim pertinet speciosæ tabulæ: sumaturque ab eadem radice *t*, tota sexta *16*.

Dico *AB* ad *S*, esse vt *16* ad *O.10a2r3*, à radice *t*.

Demonstr.

Quoniam *AR* ad *DK*, rationem habet compositam, ex duplicata *AR* ad *AD*, & ex triplicata *AR* ad *RD*, & ex subdecupla: videlicet pro abscissa vnitate *a*, compositam ex *t2* ad *a2*, & ex *t3* ad *r3*, & ex subdecupla: idest,

Ccc 2 camdem,

eamdem, quàm $t5$ ad $1oa2r3$, pro abſciſſa vnitate. ſed AQ ad AK, eſt vt AR ad DK: ergo AQ ad AK, eſt vt $t5$ ad $1oa2r3$, pro abſciſſa vnitate. Similiter DR ad DL, eſt vt $t5$ ad $1oa2r3$ pro abſciſſo binario: necnon ſimiliter pro reliquis abſciſſis numeris. Sunt autem tot parallelogramma componentia aſcriptam S, quot ordinatæ per puncta D, E, F, G, H, I; totidemque, quot ipſa puncta: & vnitate pauciores, quàm numerus partium ipſius AR; nempe totidem, quot ſunt eiuſdem numeri t abſciſſiones, & abſciſſæ. Ergo per homologiam, æquemultiplicato vtrimque antecedente per t, collectiſque conſequentibus, quadratum AB, ad adſcriptam S, eſt vt t, ad $O.1oa2r3$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 5. Prop. 9.

FOrma omnes multiplæ, ad formam omnes ſimplas eaſdem proportionales, ſuper eadem baſi iacentem, eſt æquemultipla.

Hypoth.

Eſto A forma omnes duplæ: & eſto B forma omnes ſimplæ eædem proportionales, ſuper communi baſi iacentes.

Dico A ad B duplam eſſe.

Demonſtr.

Diuiſa enim communi baſi, per quemlibet nu-
def.30 b merum, in partes æquales, ordinatę per puncta diuiſio-

uiſionum in *A*, duplæ ſunt ordinatarum per eadem puncta in *B*, ſingulæ ſingularum: & adiacentia parallelogramma, quæ adſcriptas componunt, dupla ſunt ſingula ſingulorum; & ſimul omnia ſi-
def.33b mul omnium: & adſcripta *A*, adſcriptæ *B* eſt du-
7. b. pla: ſed adſcripta *B* quaſi eſt ęqualis ad ſuam for-
31. 3. mam *B*: ergo adſcripta *A*, quaſi eſt dupla for-
7. b. mæ *B*: ſed forma *A* quaſi eſt æqualis adſcriptæ *A*: & ſunt formæ *A*, *B*, quantitates determinatę.
33. 3. Ergo *A* ad *B* eſt dupla. Quod &c. Quare &c.

Theor. 6. Prop. 10.

OMnes quadraturæ ſuper eadem baſi conſtitutæ, ſunt inter ſe æquales.

Demonſtr.

8. b. Nam adſcripta cuiuslibet quadraturæ, ad formam in vertice formoſæ tabulæ iacentem, eſt vt quadratrix homonyma, ad totam vnitate plus ordinatam, quàm in qua baſi eſt quadratrix in ſua ta-
18. 3. bula: ſed quadratrix ad huiuſmodi totam, quaſi eſt æqualis: ergo adſcripta quadraturæ, ad formam in vertice formoſę iacentem, quaſi eſt ęqua-
7. b. lis: ſed & ad ſuam quadraturam quaſi eſt æqualis:
33. 3. ergo quadratura ad formam in vertice formoſæ iacentem, eſt æqualis. Quare omnes quadraturæ, cum eidem determinatæ formæ ſint æquales, inter ſe ſunt æquales.

Theor. 7. Prop. 11.

IN vna quasque basi tabulæ subquadraturarum, subquadraturæ sunt æquales: & simul omnes, componunt quantitatem formæ, in vertice formosæ tabulæ iacentis.

Demonstr.

def. 28b Nam in vnaquaque basi tabulæ subquadraturarum, quadraturæ sunt æquemul tiplæ. Sed æqua-
9. b.
10. b. les, ipsæ sunt inter se quadraturæ: ergo æquales etiam sunt inter se subquadraturæ.

Deinde in vnaquaque basi tabulæ subquadraturarum, quotupla est quadratura vna vnius, tot sunt subquadraturæ: atque totupla est summa omnium subquadraturarum, ad vnam tantùm. quare summa omnium subquadraturarum, vni quadra-
10. b. turæ est æqualis: sed vnaquælibet quadratura æqualis est formæ in vertice formosæ tabulæ iacenti. Quare in vnaquaque basi tabulæ subquadraturarum, summa omnium, æqualis est vni formæ, in vertice formosæ tabulæ iacenti.

Porro in Tabula Formosa, in ipsius formis, præter ea, quæ in epistola ad Excellentissimum Cassinum commemoraui ex meo libello Nouarum Quadraturarum alia inueni duo, quæ hic pro coronide recensebo: aliàs publicanda cum demonstratione, si Deus otium, & vlteriorem fortunam concesserit.

Vnum de mixtilineis angulis, & de cornibus formarum; & de angulorum quantitatibus, videlicet.

Se-

Secundæ basis secunda & penultima forma, est binangula, cuius angulorum sinus rectus duplus versi. tertiæ verò, & quartę, ac reliquarum deinceps omnium basium formæ, prima & vltima, secunda & penultima, sunt vnicornes, & vnangulæ; quarum sinus rectus angulorum, ad versum totuplus est, quotus est ordo basis: in tertia, triplus; in quarta, quadruplus; in quinta quintuplus, & sic deinceps. reliquæ demum formæ omnes, sunt bicornes.

Alterũ de centris grauitatum bipartitum, cuius prima pars est.

Cuiusque formæ in tabula formosa, recta linea per centrum grauitatis ordinata, facit partes basis reciprocè proportionales, abscissam ad residuam, sicut eius ordinum numeri in sua basi à prima, & ab vltima. Exempli gratia. Formæ in quarta basi, secundæ trittultimæ per centrum ordinata, facit partes basis, abscissam ad residuam proportionales, vt 3 ad 2, ordo tritultimæ ad ordinem secundæ.

Secunda pars est. In vnaquaque forma, linea ex centro grauitatis ducta ordinatim ad basim, à basi, & centro finita, dicetur, Altitudo centralis. Itaque formarum in tabula formosa, centrales altitudines habent reciprocam rationem compositam ex rationibus numerorum, qui quadraturas ex formis producunt; ex directa iacentium in ijsdem basibus, & lateribus tabulæ quadraturarum, & ex conuersa iacentium in basibus duplordinatis, & in lateribus vnitate minùs, quàm duplordinatis. Exempli gratia. Centralis altitudo *FO.a4r2.* formæ in sexta basi tertiæ quintultimæ, ad centralem altitudinem *FO.a3r6*, formæ in nona

basi

basi septimæ quartultimæ, rationem habet compositam ex rationibus numerorum quadraturas producentium ex formis; ex ratione, inquam, 105, tertij quintultimi in sexta basi, ad 840, septimum quartultimum in nona basi; & ex ratione 352716, tredecimi septimultimi in decima octaua basi, ad 6435, quintum nonultimum in duodecima basi.

Vel aliter. Altitudines centrales formarum in tabula formosa iacentium, rationem habent compositam, tum ex ratione earumdem formarum conuersa, tum etiam ex directa aliarum in eadem tabula in basibus duplordinatis, & in lateribus vnitate minùs quàm duplordinatis. Exempli gratia. Centralis altitudo *FO.a4r2*, ad centralem *FO.a3r6*, rationem habet compositam, ex rationibus, *FO.a3r6*, ad *FO.a4r2*; & *FO.a8r4*, ad *FO a6r12*.



DEO GRATIAS.



13